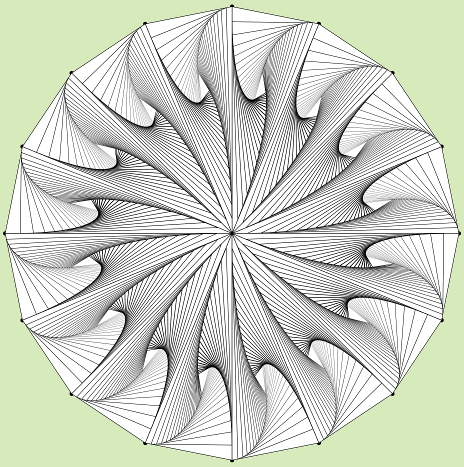
Chapitre 3

Limites et continuité



Hors Sujet

Titre : « Flower Chucker »
Auteur : Banksy-Pochoiriste
Présentation succinte de l'auteur : Il combine les techniques du graffiti et du pochoir pour faire passer ses messages, qui mêlent souvent politique, humour et poésie comme Ernest Pignon-Ernest ou Blek le rat. Les pochoirs de Banksy sont des images humoristiques, parfois combinés avec des slogans. Le message est généralement antimilitariste, anticapitaliste ou antisystème. Ses personnages sont souvent des rats, des singes, des policiers, des soldats, des enfants ou des personnes âgées.
Il s'est forgé une certaine notoriété dans les milieux alternatifs et les médias traditionnels s'intéressent aussi à lui. Il a notamment travaillé sur le film Les Fils de l'homme2 et a réalisé en 2003 la pochette du disque de Blur, Think Tank.
Banksy a fondé le projet « Santa's Ghetto »en réalisant des peintures sur le mur de Gaza afin de redonner espoir aux habitants palestiniens et israéliens. Aidé par d'autres artistes, comme Ron English, un Américain, le mur de séparation prend petit à petit les couleurs d'une toile artistique géante, comme avec l'image de la petite Vietnamienne brûlée au napalm qui tient par la main Mickey Mouse et Ronald McDonald.
Concernant ce projet, Banksy raconte dans son livre Wall and Piece, qu'un jour, alors qu'il peignait sur le mur de séparation, un habitant est venu lui dire : « vous embellissez le mur ». Banksy, flatté : « Merci, c'est gentil », fut aussitôt coupé par le vieil homme : « On ne veut pas que ce mur soit beau, on ne veut pas de ce mur, rentrez chez vous ».

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 3

Limites et continuité

Résumé

Les notions de continuité et de dérivabilité, et par suite d'intégration sont apparus tardivement dans l'histoire des mathématiques ($XVII^{\text{ème}}$ siècle) et ont permis de résoudre de nombreux problèmes auxquels les méthodes classiques n'offraient pas de solution générale comme le calcul de la vitesse instantanée, la recherche de trajectoire d'un objet en mouvement, le calcul de la longueur de la trajectoire d'une planète, le calcul de l'aire limitée par des courbes, ... Ce n'est qu'au siècle dernier que les mathématiciens ont travaillé avec rigueur en utilisant ces nouveaux objets, en effet ils se sont longtemps contentés d'utiliser des définitions intuitives.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les intervalles considérées sont non vides et non réduit à un réel.

I) Préliminaires : Limites

I-1 Définition rigoureuse des limites

I-1.1 Limites en ∞

Nous allons donné ici des définitions très proche de celles rencontrés sur la convergence des suites numériques :

Définition 1 :

On dit qu'une fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle I ouvert contenant ℓ contient toutes les images $f(x)$ à partir d'un certain réel x_0 et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Exemple :

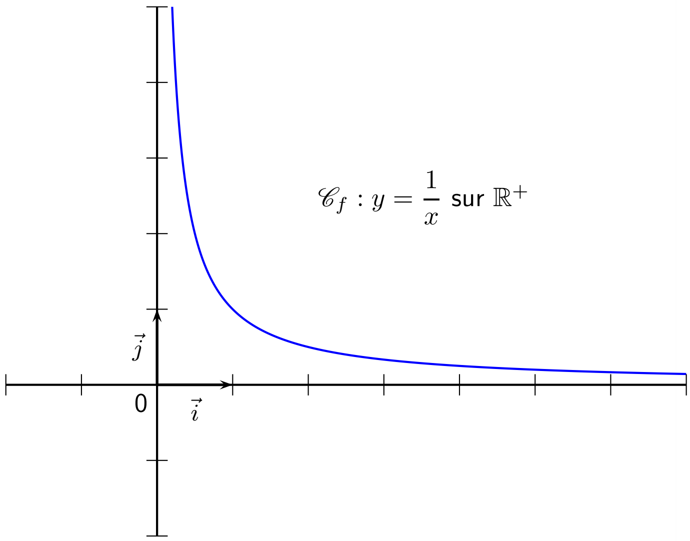
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Considérons un intervalle I ouvert du type $]-\epsilon; +\epsilon[$, montrons que toutes les images $f(x)$ sont dans I à partir d'un certain réel x_0.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{1}{x} < \epsilon \iff x > \frac{1}{\epsilon}$

Ainsi, en prenant $x_0 = \frac{1}{\epsilon}$ on a

$$f(x) \in I, \qquad \forall x > x_0$$



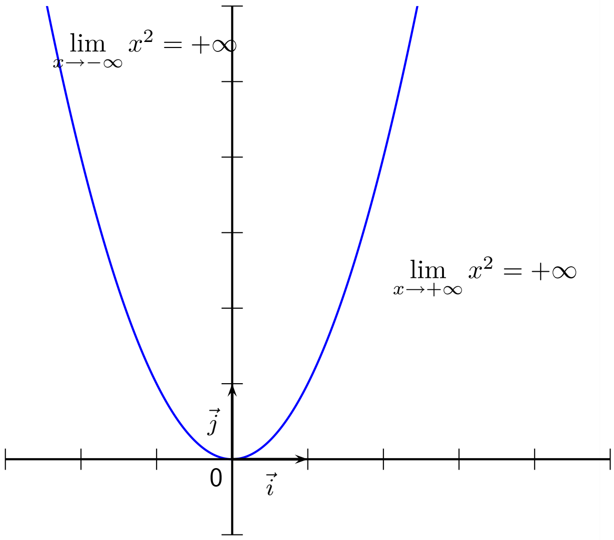
Définition 2 :

– On dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle $I =]A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les images $f(x)$ à partir d'un certain réel x_0 et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

– On dit qu'une fonction f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle $I =]-\infty; A[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les images $f(x)$ à partir d'un certain réel x_0 et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$



Définition 3 : *en* $-\infty$

– On dit qu'une fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si et seulement si tout intervalle I ouvert contenant ℓ contient toutes les images $f(x)$ pour des réels inférieurs à un certain réel x_0 et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

– On dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si et seulement si tout intervalle $I =]A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les images $f(x)$ pour des réels inférieurs à un certain réel x_0 et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

– On dit qu'une fonction f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ si et seulement si tout intervalle $I =]-\infty; A[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les images $f(x)$ pour des réels inférieurs à un certain réel x_0 et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

I-1.2 Limite en a, avec $a \in \mathbb{R}$

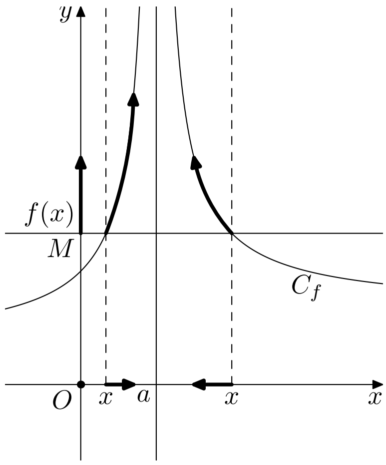
Définition 4 :

On dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ en a si et seulement pour tout intervalle $I =]M;+\infty[$, avec $M \in \mathbb{R}$ il existe un intervalle ouvert O contenant a tel que $f(x) \in I$ pour tout $x \in O$ et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Dans ce cas on dit aussi que f admet une *asymptote verticale* d'équation $x = a$.

Illustration :



De manière équivalente on définit enfin les deux dernières limites :

Définition 5 :

- On dit qu'une fonction f tend vers $-\infty$ en a si et seulement pour tout intervalle $I =]-\infty;M[$, avec $M \in \mathbb{R}$ il existe un intervalle ouvert O contenant a tel que $f(x) \in I$ pour tout $x \in O$ et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

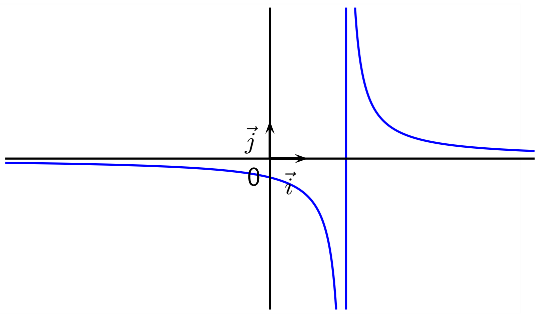
- On dit qu'une fonction f tend vers ℓ en a si et seulement pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ il existe un intervalle ouvert O contenant a tels que $f(x) \in I$ pour tout $x \in O$ et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Dans ce cas on dit aussi que f admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$.

Exemple :

$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{x-2}\right) = +\infty$ (et $\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{x-2}\right) = -\infty$), donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$



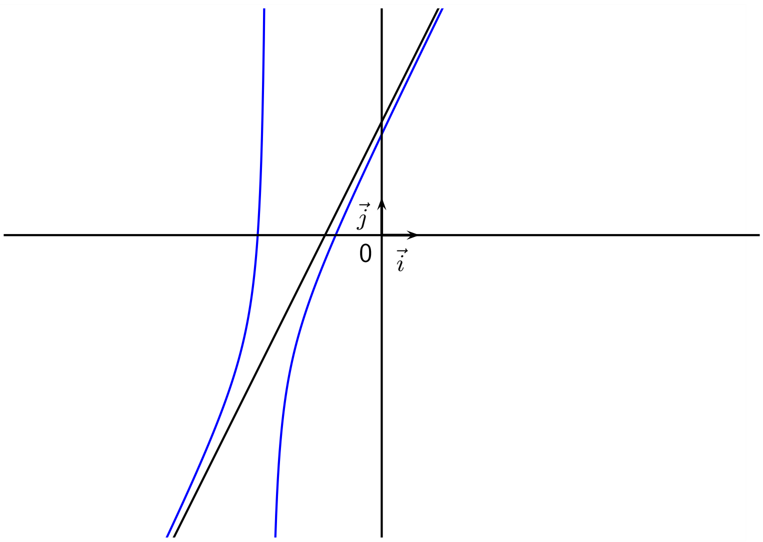
I-1.3 Asymptotes obliques

Définition 6 :
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f en $\pm\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Exercice 1. On note $f(x) = \dfrac{2x^2 + 9x + 8}{x + 3}$

1. Démontrer que $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{1}{x + 3}$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x + 3)]$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2x + 3)]$
4. En déduire que la droite Δ d'équation $y = 2x + 3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$



I-2 Limites usuelles

Théorème 1 : ***Les limites à connaître***

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

I-3 Limites et opérations

I-3.1 Somme, produit, quotient

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus en classe de première, on se contentera ici d'énumérer les cas d'indétermination :

LES 4 FORMES INDÉTERMINÉES À CONNAÎTRE

« $0 \times \infty$ » « $\dfrac{0}{0}$ » « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » « $\infty - \infty$ »

Attention, on ne dira pas « zéro sur zéro est une forme indéterminée »mais plutôt « le quotient de deux fonctions tendant vers 0 est une forme indéterminée »

Exercice 1 :

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $g : x \longmapsto \dfrac{1+x}{2-x}$ en 2
2. $h : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{x+1}$ en $+\infty$
3. $k : x \longmapsto x - \sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$

I-4 Composée de deux fonctions

Théorème 2 :

Soit $f = g \circ u$, une fonction composée de deux fonctions u et g.
a, b et ℓ désignent des réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$.
Si on a $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Preuve

Raisonnons dans le cas où $a = +\infty$, $b = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$ Soit J un intervalle ouvert qui contient ℓ.
Comme $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$, J contient tous les réels $g(x)$ pour x strictement inférieur à un certain x_0.
De plus, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$, l'intervalle ouvert $]-\infty; x_0[$ contient tous les réels $u(x)$ pour x supérieur à un certain réel x_1.
Si $x > x_1$, on a alors $u(x) < x_0$, et donc $g(u(x)) > A$ i.e $f(x) \in J$
Ainsi tout intervalle ouvert J qui contient ℓ contient aussi tous les réels $f(x)$ pour x assez grand ; ce qui signifie que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Remarque : Ce théorème reste identique si $v_n = f(u_n)$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{x+1}}$$

et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{\dfrac{2^{n+2}+1}{2^n+1}}$
Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et démontrer que la suite (v_n) est convergente, préciser sa limite.

Solutions :

Pour x positif, $f(x) = \sqrt{t}$ avec $t = \dfrac{4x+1}{x+1}$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+1}{x+1} = \dfrac{4x}{x} = 4$ (*fonction rationnelle en* $+\infty$)
et $\lim\limits_{t\to 4} \sqrt{t} = 2$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

De plus on a $v_n = f(u_n)$ avec $u_n = 2^n$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 2}$$

I-5 Théorème de comparaison et des gendarmes

Théorème 3 :

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a; +\infty[$:
- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Preuve

- Soit $J =]A; +\infty[$ un intervalle.
  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ il existe un réel x_0 tel que $u(x) \in J$ à partir de x_0.
  De même il existe un réel x_1 tel que $f(x) \geq u(x)$ pour $x > x_1$
  Par conséquent pour $x > max(x_0; x_1)$ $f(x) \in J$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Soit $J =]-\infty; A[$ un intervalle.
  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ il existe un réel x_0 tel que $u(x) \in J$ à partir de x_0.
  De même il existe un réel x_1 tel que $f(x) \geq u(x)$ pour $x > x_1$
  Par conséquent pour $x > max(x_0; x_1)$ $f(x) \in J$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exercice 3 :

1. Soit $f(x) = -x + \sin x$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Poser $v(x) = -x + 1$)
2. Soit $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ (Poser $u(x) = \dfrac{1}{x^2}$)

Théorème 4 : *Théorème des gendarmes*

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a; +\infty[$.
Si pour x assez grand, on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Preuve

Soit J un intervalle ouvert contenant ℓ. Il s'agit de démontrer que J contient tous les réels $f(x)$ à partir d'un certain x_0.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell$, i.e qu'il existe x_0 tel que $u(x) \in J$ à partir de x_0 et il existe un réel x_1 tel que $v(x) \in J$ à partir de x_1.
Soit $x_2 = max(x_0; x_1)$. Si $x > x_2$, l'intervalle J contient $u(x)$ et $v(x)$, donc il contient aussi tous les réels compris entre $u(x)$ et $v(x)$, en particulier il contient $f(x)$, ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{2+3\sin x}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

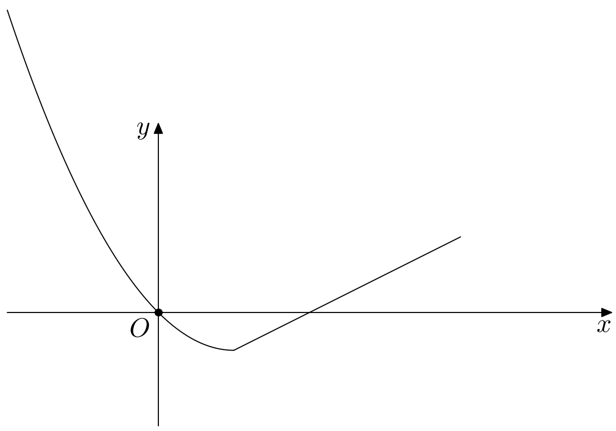
II) Continuité d'une fonction

II-1 Fonction continue en un point

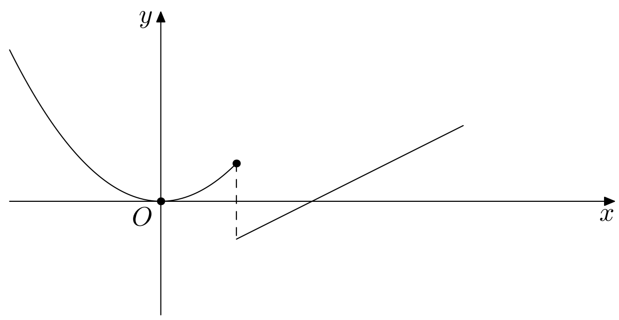
Définition 7 :

Soit I un intervalle et f une fonction définie au moins sur I, a un réel de I.
On dit que f est continue en a lorsque : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Illustration :



On peut tracer la courbe de f sans lever le crayon. Elle ne présente pas de « saut », f est continue en tout point.



On ne peut pas tracer $\mathscr{C}_f$ sans lever le crayon, f présente une discontinuité en un point ; on dit qu'elle est discontinue en ce point.

Remarque : La condition $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ peut aussi s'écrire $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

II-2 Un contre-exemple : la fonction partie entière

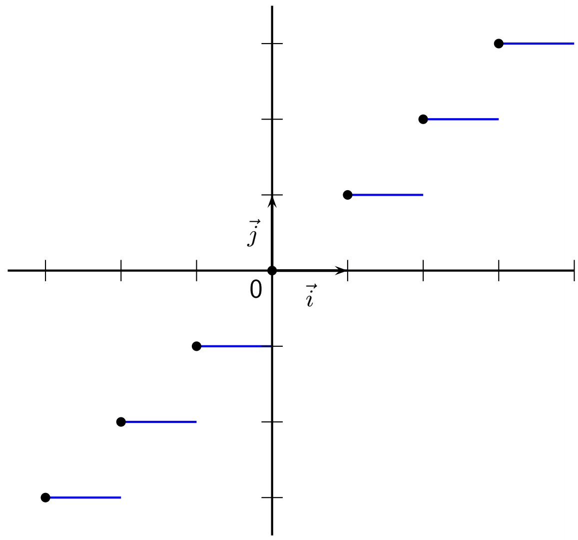
Notons E la fonction qui à un réel x associe sa partie entière :

$$E(x) = \text{le plus grand entier inférieur ou égal à } x$$

Autrement dit, $E(x)$ est l'unique entier tel que :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Par exemple $E(\pi) = 3$, $E(-\pi) = -4$ [1]
Ci-dessous nous avons tracé $\mathscr{C}_E$.



Cette fonction admet des discontinuités en tout entier, en effet on a :

$$\lim_{x \to 2^+} E(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 2^-} E(x) = 1$$

Les limites à droite et à gauche étant différente, la fonction partie entière n'admet pas de limite en 2, elle est donc discontinue en 2.

II-3 Autre cas de fonction non continue

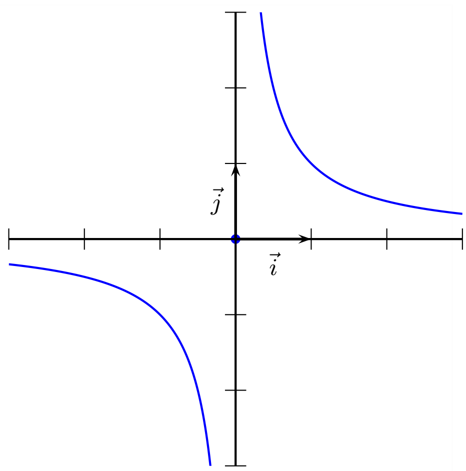
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue en 0, en effet :

$f(0) = 0 \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad$ et $\quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Autrement dit f n'admet pas de limite en 0.



Attention !

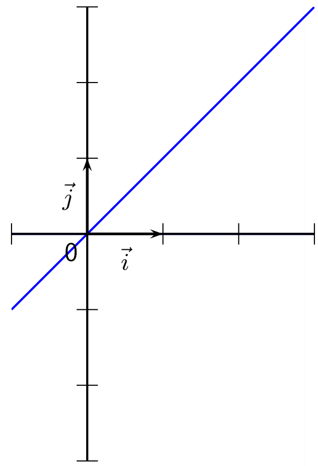
Il ne faut pas confondre cette fonction avec la fonction inverse qui est continue en tout point de son ensemble de définition !

Remarque : On dit souvent qu'une fonction continue est une fonction est représentée par un trait continu (obtenu sans relâcher le crayon). Il faut rester méfiant par rapport à cette interprétation, car il existe en mathématiques des fonctions « monstres »comme :

1. On remarquera que la fonction partie entière des mathématiciens n'est pas impaire contrairement à celle des informaticiens qui considère que $E(-\pi) = -3$

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En apparence on pourrait croire que cette courbe se trace sans lever le crayon et pourtant la fonction présente une infinité de discontinuité.



II-4 Fonction continue sur un intervalle

Définition 8 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I
La fonction f est continue sur I si elle est continue en a, pour tout $a \in I$

Exemple :

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Démontrer cette propriété est assez ardu, car la définition de la continuité et donc de celle des limites n'est pas d'un usage aisé. Nous admettrons donc la continuité de nombreuses fonctions usuelles.

II-5 Continuité des fonctions usuelles

Théorème 5 : *Admis*

Les fonctions polynômes, la fonction racine carrée, la fonction valeur absolue, les fonction sinus et cosinus sont continues la où elles sont définies

Théorème 6 : *Admis*

Soit f, g deux fonctions continue sur un intervalle I et λ un réel. Alors :
- $f+g$ est une fonction continue sur I
- fg est une fonction continue sur I
- λf est une fonction continue sur I
- Si de plus g est une fonction non nulle sur I, $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I
- Si g est continue sur un intervalle contenant $f(I)$ alors $f \circ g$ est continue sur I

Corollaire 1 :

Toutes fonctions rationnelles à coefficients réels est continue sur son ensemble de définition.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}{x^2 + 1}$$

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

II-6 Limite d'une suite et d'une fonction continue

Théorème 7 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit (u_n) une suite de réels de I qui converge vers $\ell \in I$.
Alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$, autrement dit :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$$

Preuve

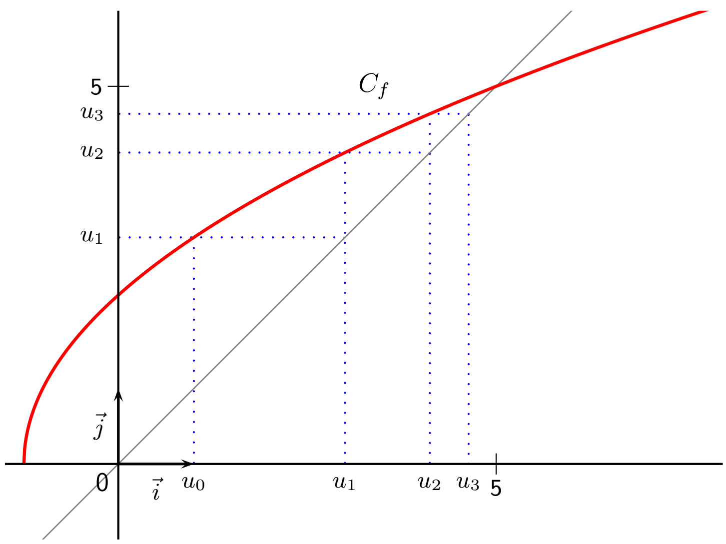
Comme f est continue en ℓ, on a :

$$\lim_{x \to +\ell} f(x) = f(l)$$

Considérons un intervalle ouvert J centré autour de $f(l)$, il existe un intervalle ouvert L centré autour de ℓ tel que $f(x) \in J$ pour tout $x \in L$
Comme (u_n) converge vers ℓ, à partir d'un certain rang n_0 on aura $u_n \in L$ et donc $f(u_n) \in J$

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$$



1. (a) A l'aide de la représentation graphique ci-dessus, où f est définie par $f(x) = \sqrt{4x + 5}$, conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n)
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(c) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.

2. (a) En utilisant la définition d'une suite convergente, montrer que si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (v_n), définie par $v_n = u_{n+1}$, converge également vers l.

   (b) Soit (u_n) une suite convergente vers l définie par la donnée de son premier terme et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue en l.
   Montrer que $f(l) = l$

3. On se propose ici d'obtenir la limite de la suite (u_n) de la première partie par deux méthodes différentes.

   (a) **Méthode 1** :Déterminer la limite de la suite (u_n) de la première partie en utilisant la question précédente.

   (b) **Méthode 2** : La représentation graphique ayant amené à conjecturer que (u_n) converge vers 5, on s'interesse à la suite de terme général $v_n = 5 - u_n$.

      i. Montrer que
      $$v_{n+1} = \frac{4v_n}{5+\sqrt{25-4v_n}}$$

      ii. En déduire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
      $$0 \leq v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \times 4$$

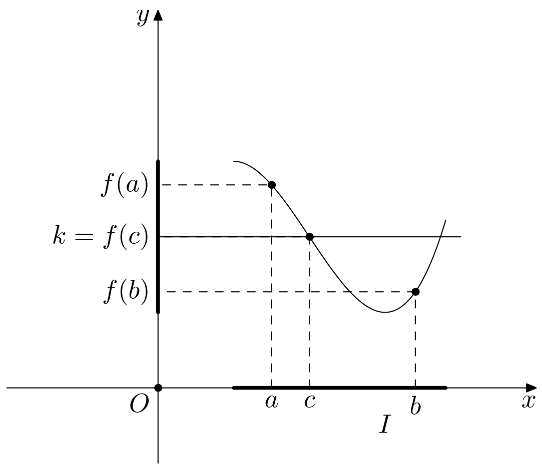
      iii. Conclure.

II-7 Théorème des valeurs intermédiares

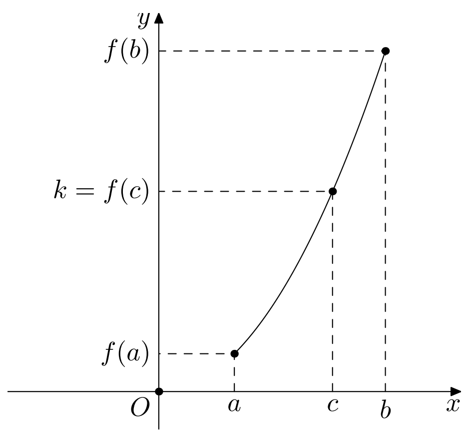
Théorème 8 : *des valeurs intermédiares*
Soit I un intervalle, a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur I, soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors :
il existe au moins un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = k$

Illustration :

Cas d'une fonction non monotone :



Cas d'une fonction monotone :



Preuve

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ et k un nombre réel tel que $f(a) \leq k \leq f(b)$ (le cas $f(b) \leq k \leq f(a)$ se traite exactement de la même manière).
On construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Si $f\left(\dfrac{1}{2}(a_0+b_0)\right) \leq k$, on prend $a_1 = \dfrac{1}{2}(a_0+b_0)$ et $b_1 = b_0$

  sinon, on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = \dfrac{1}{2}(a_0+b_0)$.
- On réitère le même processus pour construire tous les termes de la suite i.e si $f\left(\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)\right) \leq k$ on prend $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$ et $b_{n+1} = b_n$, sinon on prend $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$

  1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$,
  $$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$
  2. Montrer que la suite (a_n) est croissante, puis que la suite (b_n) est décroissante.
  En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
  3. On note ℓ la limite commune des suites (a_n) et (b_n)
     (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
     $$f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$$
     (b) Conclure.

Exercice 6 :

Démontrer que l'équation $2\cos x = x - 1$ admet un moins une solution dans $\mathbb{R}$

Remarque : L'hypothèse de continuité est essentielle, essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction partie entière avec $a = 0$, $b = 1$ et $k = \dfrac{1}{2}$!

Application :

Toute fonction polynôme P de degré impair admet au moins une racine réelle.

Preuve

Dans le cas où le coefficient devant le monôme de plus haut degré est positif (l'autre cas est identique) on a :
$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$$
donc il existe $a \in \mathbb{R}^-$ tel que $P(x) < 0$, $\forall x \leq a$ et
$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$$
donc il existe $b \in \mathbb{R}^+$ tel que $P(x) > 0$, $/forall x \geq b$
P est une fonction polynôme donc P est continue sur $[a;b]$ avec $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$

Définition 9 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on note $f(I)$ l'ensemble de toutes les images des réels appartenant à I

Exemple :

L'image de $[-1;2]$ par la fonction carré est l'intervalle $[0;4]$

Théorème 9 : *du point fixe*

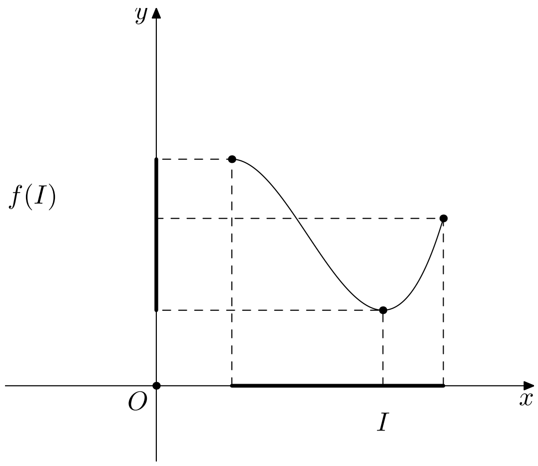
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I=[a;b]$.
Si $f(I)\subset I$ alors f admet au moins un point fixe i.e il existe $x\in I$ tel que $f(x)=x$

Preuve

Considérons la fonction g définie sur I par $g(x)=f(x)-x$.
Montrons que $0\in g(I)$. On a $g(a)=f(a)-a\in g(I)$ et $g(b)=f(b)-b\in g(I)$.
Comme $f(I)\subset I$ alors $f(a)\geq a$ et $f(b)\leq b$ i.e $g(a)\geq 0$ et $g(b)\leq 0$, par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiares il existe $c\in I$ tel que $g(c)=0 \iff f(c)=c$

Corollaire 2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.



Preuve

Soit y_1 et y_2 dans $f(I)$ tel que $y_1\leq y_2$.
Il s'agit de montrer que tout réel k compris entre y_1 et y_2 est dans $f(I)$. Soit k un tel réel.
Comme y_1 et y_2 sont dans $f(I)$, il existe a et b tels que $f(a)=y_1$ et $f(b)=y_2$.
Comme I est un intervalle on a $[a;b]\subset I$ et f est donc continue sur $[a;b]$, par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c\in I$ tel que $f(c)=k$. Par conséquent $k\in f(I)$ et donc $f(I)$ est un intervalle.

Contre-Exemple :

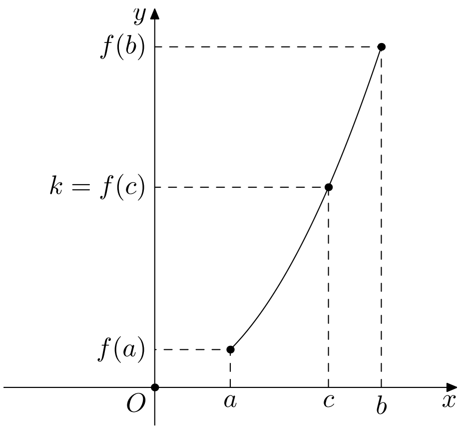
L'image de l'intervalle $[-1;2]$ par la fonction partie entière est l'ensemble $\{-1;0;1;2\}$ et cet ensemble n'est pas un intervalle.

Exemple :

L'image de l'intervalle $[-5;2]$ par la fonction carré est l'intervalle $[0;25]$. Le résultat précédent nous assure qu'il s'agit bien d'un intervalle.

II-8 Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

Théorème 10 : *théorème de la bijection*
Soit f une fonction continue et strictememnt monotone sur un intervalle I. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors :
il existe un unique c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$



Remarque : En ajoutant l'hypothèse de la monotonie, on récupère l'unicité de l'antécédent de k.

Preuve
– L'existence est assuré par le théorème des valeurs intermédiaires.
– L'unicité découle donc de la stricte monotonie de la fonction f. On sait qu'il un réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.
Considérons le cas où f est une fonction strictement croissante sur $[a; b]$, alors pour tout $x < c$ on a $f(x) < f(c)$ et pour tout $x > c$ on a $f(x) > f(c) = k$, autrement dit pour tout $x \neq c$ de l'intervalle $[a; b]$ on a $f(x) \neq f(c)$, par conséquent c est unique.

Exercice 7 :

Démontrer que l'équation $\sqrt{x} = \dfrac{5}{x-2}$ admet une unique solution réelle α ; puis encadrer α entre deux entiers consécutifs

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$, dénombrer les solutions des équations suivantes :
1. $f(x) = -1$
2. $f(x) = -5$

Exercice 9 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = (1 + x)^3 + x$$
Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1; 0]$ à 10^{-1} près

III) Notion de fonctions réciproques

Si f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Notons $J = f(I)$, J est encore un intervalle et de plus pour tout $y \in J$ il existe un unique $x \in I$ tel que

$$f(x) = y$$

On peut alors définir une nouvelle fonction g de J dans I définie par $g(y) = x$. La situation peut-être schématisée comme suit :

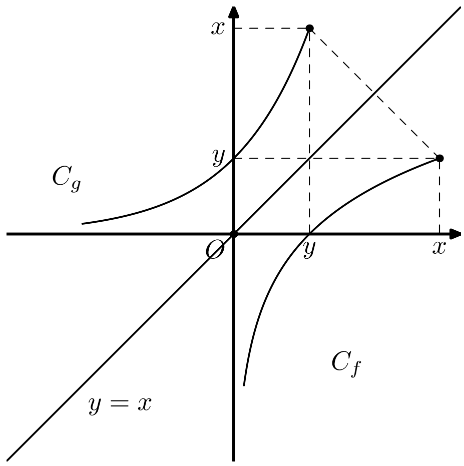
$$\begin{tikzcd} g(y)=x \arrow[r, bend left, "f"] & y=f(x) \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Il est alors clair que pour tout $x \in I$, $g(f(x)) = x$, autrement dit $g \circ f = Id_I$ et pour tout $y \in J$, $f(g(y)) = y$ i.e $f \circ g = Id_J$.

Définition 10 :

On dit que la fonction g est la fonction réciproque de la fonction f. Dans ces conditions on a aussi f est la fonction réciproque de g.

Représentation graphique :



Exercice 10 :

1. Exhibez une fonction de référence, continue et strictement monotone sur un intervalle que vous déterminerez et déterminer sa fonction réciproque.
2. Exhibez une fonction de référence, continue et non monotone sur un intervalle que vous déterminerez.
3. Démontrer que dans un repère orthonormé$(O; \vec{i}, vecj)$, les courbes de f et de sa fonction réciproque g sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère