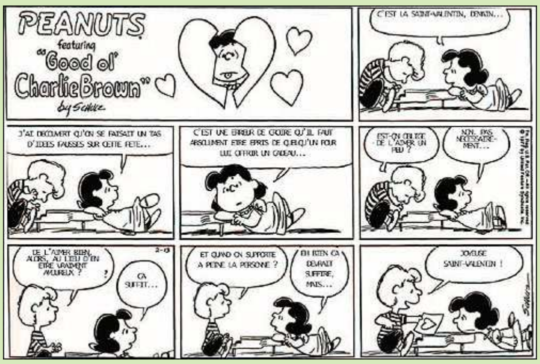
Chapitre 5

Fonctions Exponentielle

Hors Sujet



Titre : « Peanuts »
Auteur : Charles Schulz
Présentation succinte de l'auteur : Peanuts (aussi connu sous le nom de Snoopy et les Peanuts ou simplement Snoopy) est le nom d'un comic strip écrit et dessiné quotidiennement, sans interruption et sans assistance par l'Américain Charles M. Schulz (1922 - 2000) d'octobre 19501 jusqu'à sa mort, en février 2000. Il aura écrit au total 17 897 strips dont 2 506 éditions du dimanche2. Peanuts est une série de gags qui tournent autour de deux personnages centraux, un garçon maladroit, malchanceux et déprimé, Charlie Brown et son chien, Snoopy. Le strip s'appuie sur le principe du running gag (comique de répétition) où les mêmes situations entre les personnages reviennent tout au long de la bande dessinée. De plus, chacun des personnages a ses particularités, ses obsessions et ses accessoires propres, qui resurgissent chaque fois qu'ils apparaissent. Peanuts a donné également naissance à des dessins animés, dont plusieurs ont reçu un Emmy Award, à des pièces de théâtres et à des comédies musicales. Le comic a été, à partir des années 1960 un succès planétaire, notamment aux États-Unis. La popularité du strip et le nombre colossal de licences pour des publicités ou produits dérivés ont fait de Charles M. Schulz une des célébrités les plus riches du monde 3. À la mort de Schulz, le comic était publié dans plus de 2 600 journaux, dans 75 pays différents et dans 21 langues 4.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

LEÇON 5

Fonctions Exponentielle

Résumé

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une fonction f qui est proportionnelle à sa dérivée f'. (Par exemple, le phénomène de désintégration de noyaux radioactifs)
Nous allons ici nous intéresser à l'une des fonctions de ce type.
Plus particulièrement, que peut-on dire d'une fonction qui serait égale à sa dérivée ?
Nous connaissons déjà au moins une fonction égale à sa dérivée : la fonction nulle ! Mais cette fonction est sans intérêt. Notre objectif est d'en rechercher d'autres.

I) Equation différentielle du type $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$

I-1 Généralités

Une équation différentielle est une équation :
- où l'inconnue est une fonction, que l'on note habituellement y
- dans laquelle y vérifie une relation particulière avec sa ou ses dérivée(s) , comme par exemple l'équation suivante :

$$f'(x) = af(x) + b$$

En dehors des notations fonctionnelles habituelles, on s'autorise l'écriture : $y = \dfrac{x^2}{2}$ est solution de l'équation différentielle $y' = x$, étant entendu que, dans une équation différentielle l'inconnue est une fonction. y désigne donc une fonction.

Exercice 1 **:**
Trouver mentalement au moins une fonction une fonction solution sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y' = \sin x$
2. $y'' = \cos x$
3. $y' = 0$
4. $y'' = 0$
5. $y' = x + 1$
6. $y"" = x$

Définition 1 :
On appelle solution d'une équation différentielle (E) tout couple (f, I) où f est une fonction qui vérifie (E) sur I. On dira que f est solution de (E) sur I. Résoudre une équation différentielle sur I c'est trouver toutes les fonctions solutions de (E) sur I.

Remarque : Lorsqu'on ne précise pas l'intervalle I, il s'agit de l'intervalle $\mathbb{R}$.

- On distingue plusieurs types d'équation différentielle :
  - Les équations différentielles linéaire à coefficient constant sans second membre du premier ordre :

$$y' + 5y = 0$$

  - Les équations différentielles linéaire à coefficient constant avec second membre du premier ordre :

$$y' + 5y = \sin x$$

– Les équations différentielles linéaire à coefficient constant sans second membre du second ordre :

$$2y'' - 3y' + 5y = 0$$

– Les équations différentielles linéaire à coefficient variable sans second membre du premier ordre :

$$y' - 5xy = 0$$

– Les équations différentielles non linéaire :

$$\sqrt{y'} = y$$

Remarque : Nous n'étudierons que des équations différentielles des deux premiers types.

I-2 Equations différentielles du type $y' = y$

Théorème 1 :

Le problème différentiel :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

Remarque : Autrement dit il n'existe qu'une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée qui vaut 1 en 0

Preuve

Il s'agit de prouver qu'il existe une unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée est égale à elle-même $y' = y$ et qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$.

L'existence d'une telle fonction est délicate à prouver et les programmes officiels suggèrent d'admettre provisoirement ce résultat (qui se démontre lors de la quadrature de l'hyperbole lors de l'étude du calcul intégral).

En revanche on a prouvé l'unicité de la solution de l'équation différentielle à l'occasion du TP d'introduction.

Voici les idées principales d'une démonstration très technique (et hors programme) de l'existence d'une telle solution utilisant les suites adjacentes :

1. On montre d'abord que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ définies par :

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

   sont adjacentes
2. On en déduit qu'elles convergent vers une même limite, qui dépends de x, que nous notons $\ell(x)$
3. On montre enfin que la fonction ℓ est solution du problème, comme $u_n(0) = 1$ pour tout entier n il est clair que $\ell(0) = 1$. Il s'agit donc de prouver que ℓ est une fonction dérivable égale à sa dérivée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 2 :

On appelle <u>fonction exponentielle</u> l'unique fonction solution, sur $\mathbb{R}$, du problème différentiel :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On la note exp. Ainsi :

$$exp(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad exp'(x) = exp(x)$$

Propriété 1 :

1. $exp(0) = 1$
2. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $exp'(x) = exp(x)$
3. Pour tout réel x on a : $exp(x) > 0$
4. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve

1. En effet puisque exp est solution du problème différentiel.
2. idem.
3. On a démontré dans le TP d'introduction que si f était solution du problème différentiel alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$f(x)f(-x) = 1$$
et par conséquent comme exp est l'unique solution de ce problème on a :
$$exp(x) \times exp(-x) = 1$$
   - Montrons d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $exp(x) \neq 0$
   En effet supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $exp(x_0) = 0$, dans ce cas on aurait :
   $$exp(x_0) \times exp(-x_0) = 0 \neq 1$$
   C'est donc absurde, donc $exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   - Montrons désormais que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $exp(x) > 0$
   Supposons qu'il existe un réel x_1 tel que $exp(x_1) < 0$ alors comme la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est aussi continue et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une solution à l'équation $exp(x) = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent $exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - On a donc pour tout réel x :
   $$exp'(x) = exp(x) > 0$$
   La fonction exp est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2 :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors
$$(exp(u))' = exp(u) \times u'$$

Preuve

On sait que
$$(v \circ u)' = v'(u) \times u'$$
On applique ce résultat pour $v = exp$.

Exercice 2 **:**

Etudier les variations des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = exp(3x^2 + 1) \qquad \text{et} g(x) = exp(-2x + 1)$$

I-3 Equations différentielles du type $y' = ky$ $(k \in \mathbb{R})$

Il s'agit d'une simple formalité. Nous allons utiliser le travail fait précédemment.

Théorème 3 :

Le problème différentiel :

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution f dans $\mathbb{R}$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = y_0 exp(ax)$$

Preuve

- **Existence** : La fonction f, définie par $f(x) = y_0 exp(kx)$, vérifie bien les conditions :

$$f(0) = y_0 exp(0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad f'(x) - kf(x) = y_0 k exp'(kx) - y_0 k exp(kx) = 0$$

- **Unicité** : Soit g une solution quelconque du problème différentiel :

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = g(x) exp(-kx)$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (g et l'exponentielle le sont) et pour tout réel x :

$$h'(x) = g'(x) exp(-kx) - kg(x) exp(-kx)$$

Comme g est solution du problème différentiel on a $g' = kg$, par conséquent

$$h'(x) = 0$$

Donc h est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $h(0) = g(0) exp(0) = y_0$, on a :

$$h = y_0 \qquad \text{sur} \qquad \mathbb{R}$$

Par conséquent on en déduit

$$g(x) = y_0 exp(kx)$$

Donc $g = f$ sur $\mathbb{R}$

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$ et $y(0) = C$.

Ici, $a = -\dfrac{3}{2}$, donc les solutions sont les fonctions du type $x \longmapsto Ce^{-\frac{3}{2}x}$

Exercice 3 :

Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 7 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Les observations relevées pour l'étude d'une population p d'une bactérie dans une certaine préparation biologique ont conduit à envisager le modèle suivant :
- le temps t en heures
- p est une fonction de t dérivable sur $[0;+\infty[$ et $p' = 2,5p$ et $p(0) = 10$

1. Déterminer $p(t)$
2. Donner un ordre de grandeur de cette population au bout de 10 heures.

Remarque : Si $a = 0$ l'unique solution est la fonction f constamment égale à y_0

II) Fonctions exponentielles

II-1 Relation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ et premières propriétés

Théorème 4 :

Pour tous réels a et b :

$$exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$$

(La fonction exponentielle transforme les sommes en produits).

Preuve

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = exp(x+a)exp(-x)$$

On a alors $g(0) = exp(a)exp(0) = exp(a)$, de plus on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = exp(x+a)exp(-x) - exp(x+a)exp(-x) = 0$$

Par conséquent la fonction est constante sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$exp(x+a)exp(-x) = exp(a)$$

Par conséquent :

$$exp(x+a) = \frac{exp(a)}{exp(-x)}$$

Or, on a vu dans le TP d'introduction de la fonction exponentielle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$exp(x)exp(-x) = 1 \iff exp(x) = \frac{1}{exp(-x)}$$

Par conséquent on peut conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$exp(x+a) = exp(a) \times exp(x)$$

En choisissant $x = b$ on obtient le résultat voulu.

Remarque : Réciproquement, toute fonction transformant les sommes en produits est une fonction du type :

$$f(x) = exp(ax) \qquad \text{où} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Nous admettrons ce résultat.

Propriété 2 :

Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n on a :

1. $exp(a-b) = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}$
2. $exp(-b) = \dfrac{1}{exp(b)}$
3. $exp(na) = [exp(a)]^n$, $n \in \mathbb{Z}$
4. $exp\left(\dfrac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{exp(a)}$ pour $n \geq 1$

Preuve

Pour tous réels a et b on a, d'après le théorème précédent :

1. $exp(a-b) \times exp(b) = \exp(a-b+b) = exp(a)$, d'où :

$$exp(a-b) = \frac{exp(a)}{exp(b)}$$

2. Comme

$$exp(a-b) = \frac{exp(a)}{exp(b)}$$

On obtient avec $a = 0$:

$$exp(-b) = \frac{exp(0)}{exp(b)} = \frac{1}{exp(b)}$$

3. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ afin de démontrer la propriété $\mathscr{P}(n)$: $exp(na) = [exp(a)]^n$
   - *Initialisation* : Pour $n = 0$ on a : $exp(0 \times a) = exp(0) = 1$ et $(exp(a))^0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - *Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier n, montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$. On a :

$$\begin{array}{rcll} exp((n+1)a) & = & exp(na+a) & \\ & = & exp(na)exp(a) & \text{puisque } exp(x+y) = exp(x)exp(y) \\ & = & [exp(a)]^n exp(a) & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ & = & [exp(a)]^{n+1} & \end{array}$$

Ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.
On vient de démonter que pour tout $n \in \mathbb{N}$:$exp(na) = [exp(a)]^n$

Qu'en est-il si $n < 0 \Longrightarrow -n > 0$?
On sait que

$$exp(-na)exp(na) = 1$$

Donc :

$$exp(na) = \frac{1}{exp(-na)} = \frac{1}{(exp(a))^{-n}} = [exp(a)]^n$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$exp(na) = [exp(a)]^n$$

4. Un petit rappel d'abord, la racine $n-ième$ d'un nombre réel positif est l'unique solution de l'équation $x^n = r$.
On a pour tout $n \geq 1$ $exp\left(\dfrac{a}{n}\right)^n = exp\left(n \times \dfrac{a}{n}\right) = exp(a)$, par conséquent :

$$exp\left(\frac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{exp(a)}$$

II-2 Nombre e et notation e^x

Notation

On note e le nombre $exp(1)$:

$$e = exp(1) \simeq 2,718$$

Remarque :

– On a vu dans le TD d'introduction que :

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

– On a alors $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$exp(n) = exp(n \times 1) = [exp(1)]^n = e^n$$

De plus, comme l'exponentielle transforme les sommes en produits, on a, pour tous n et m dans $\mathbb{Z}$:

$$e^{n+m} = exp(n+m) = exp(n)exp(m) = e^n e^m$$

d'où la notation suivante :

Notation

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note

$$e^x = exp(x)$$

Remarque : Cette notation est légitime, elle ne fait que prolonger à tous les réels, une propriété constatée sur les entiers.

Résumons désormais, à l'aide de cette nouvelle notation, toutes les propriétés rencontrées sur la fonction exponentielle :

Résumé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour toute fonction u dérivable sur I, on a

1. $e^0 = 1$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $e^1 = e$
4. $e^x e^{-x} = 1$
5. $e^x > 0$
6. $e^x e^y = e^{x+y}$
7. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
8. $e^{nx} = (e^x)^n$
9. $(e^u)' = e^u \times u'$
10. $e^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{e^x}$, $n \geq 1$

Exercice 5 :

Simplifier :

1. $e^{x+2}e^{-x+2}$
2. $\dfrac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}$
3. $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
4. $\sqrt{(e^{-2x+1})^2}$

II-3 Propriétés asymptotiques

Propriété 3 :

Pour tout A et pour tout B réels on a :

1. $e^A = e^B \iff A = B$
2. $x > A \iff e^x > e^A$
3. $x < A \iff e^x < e^A$

Preuve

Si $A = B$ on a alors $e^A = e^B$, réciproquement : si $e^A = e^B$, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on a :

$$x > A \Longrightarrow e^x > e^A$$

et

$$x < A \Longrightarrow e^x < e^A$$

donc il est impossible que $B \neq A$, donc $B = A$, le premier point est démontré.
Le deuxième et le troisième point proviennent directement du fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 **:**

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{-x} + 1 = 0$
2. $e^{3x-1} - e^{-x} < 0$
3. $-3 \leq e^x \leq 1$
4. $e^{2x} + e^x < 3$ [a]

[a] On utilisera le résultat du 3. après avoir posé $X = e^x$

Théorème 5 :

On a :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Preuve

Montrons pour cela que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x \geq x$$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - x$$

g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$
$g'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff e^x = e^0 \iff x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Par conséquent $g(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ i.e :

$$e^x - x \geq 1 > 0 \Longrightarrow e^x > x$$

De plus :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Posons $X = -x$, alors si $x \longrightarrow -\infty$, $X \longrightarrow +\infty$ dans ce cas :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

Remarque : La représentation graphique de la fonction exponentielle admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Exercice 7 :

Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = e^{3-x}$
2. $f(x) = \dfrac{e^{2x} + 2}{e^x - 1}$

Exercice 8 :

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x \geq x + 1$$

2. Déterminer l'approximation affine de la fonction exponentielle en 0

Théorème 6 : *Autres limites avec des exponentielles*

On a :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$
2. En particulier :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$
3. Tangente à l'origine :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Exemple :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \sqrt{x} = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Preuve

1. Montrons tout d'abord que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$
On sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$ on a : $e^X \geq X$
En particulier pour $X = \frac{x}{n+1}$, avec $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1}$
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{n+1}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc :
$$e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1} \Longrightarrow f\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right) \geq f\left(\frac{x}{n+1}\right) \Longrightarrow e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$
Ainsi on obtient :
$$\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$$
Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$
En posant $X = -x$ on obtient : $\lim_{x\to-\infty} \mid x^n e^x \mid = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^n}{e^X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} = 0$ d'où : $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
2. En particulier pour $n = 1$ on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
3. Pour la troisième limite, nous reconnaissons le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0, sa limite est donc égale au nombre dérivé en 0 de l'exponentielle à savoir :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = exp'(0) = e^0 = 1$$

Remarque : Quand on a une forme indéterminée impliquant une exponentielle et un polynôme, c'est toujours l'exponentielle qui « l'emporte ».

Exercice 9 :

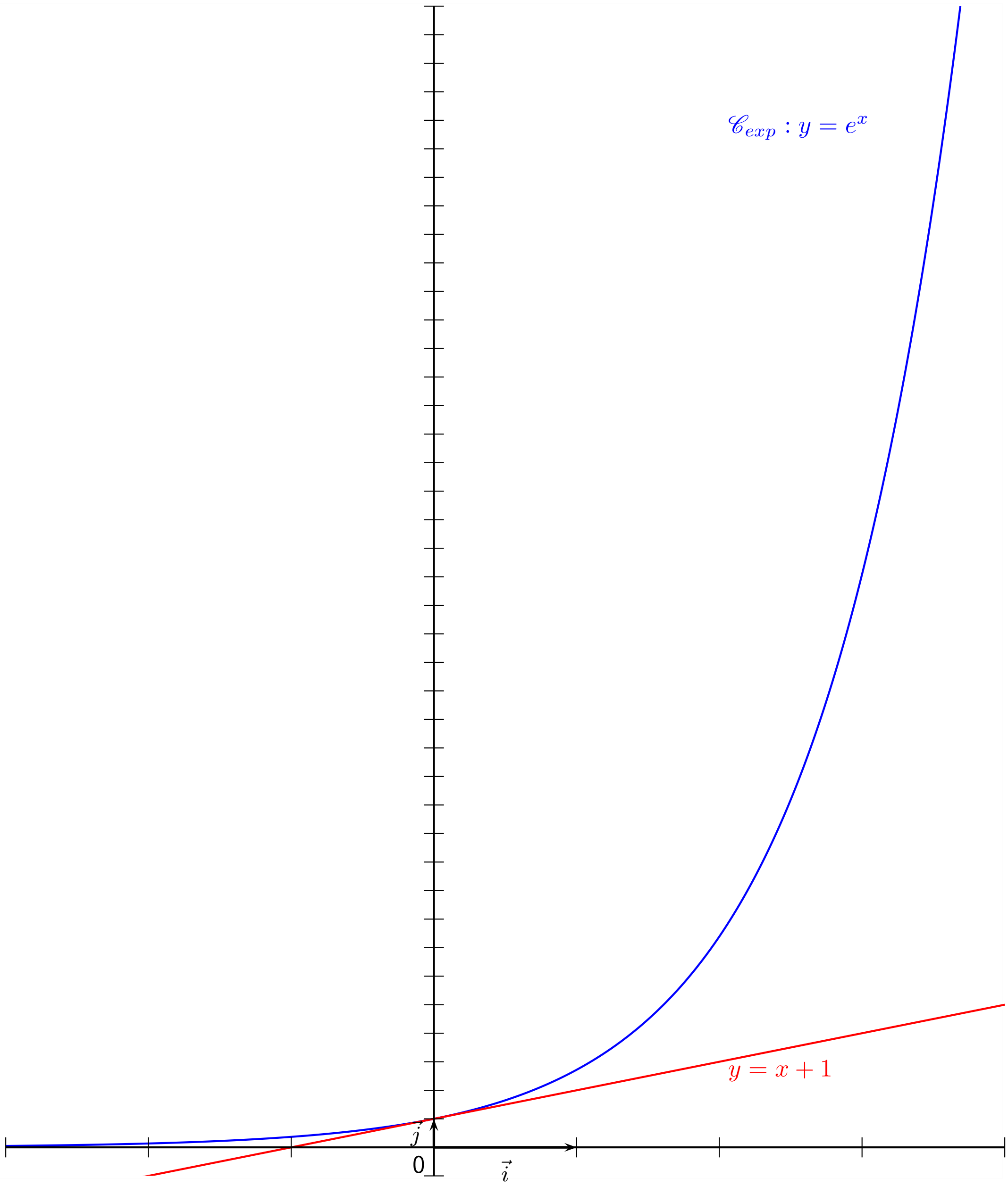
Etudier la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$

II-4 Courbe représentative

On peut établir le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de e^x				$+$			
Variation de e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

En appliquant le théorème de la bijection, l'équation $e^x = \lambda$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ dès que $\lambda > 0$.
On dispose désormais de suffisament d'information pour représenter graphiquement la fonction exponentielle :



Définition 3 :
Comme on vient de le voir, si $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ l'équation $e^x = \lambda$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on appelle logarithme népérien de λ et que l'on note $\ln \lambda$

Remarque : On a donc, pour tout $\lambda > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$e^{\ln \lambda} = \lambda \qquad \text{et} \qquad \ln(e^{\alpha}) = \alpha$$

En effet pour la première égalité, comme $\ln \lambda$ est solution de $e^x = \lambda$ on obtient littéralement $e^{\ln \lambda} = \lambda$
De plus le nombre $\ln(e^{\alpha})$ est solution de l'équation $e^x = e^{\alpha} \iff x = \alpha$, par conséquent $\ln(e^{\alpha}) = \alpha$

III) Application : Equations différentielles et modèles d'évolution

III-1 Equation du type $y' = ay + b$ avec a et b réels.

Théorème 7 :
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Le problème différentiel :

$$y' = ay + b$$

admet une infinité de solutions z, où z est une fonction de la forme :

$$z(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a} \qquad \text{où} K \text{ parcourt } \mathbb{R}$$

Preuve

– Remarquons que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g = -\frac{b}{a}$$

est une solution particulière de $y' = ay + b$. On a $g' = 0 = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b$.
Soit z une solution quelconque de (E). (On sait déjà qu'il en existe au moins une, g).
On a sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} z' = az + b \\ g' = ag + b \end{cases}$$

En retranchant membre à membre on obtient :

$$(z - g)' = a(z - g)$$

Par conséquent la fonction $z - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ dont on connait la forme des solutions, d'où , pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$z(x) - g(x) = Ke^{ax} \qquad \text{avec} K \in \mathbb{R}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on obtient :

$$z(x) = Ke^{ax} + g(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

Ainsi l'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une infinité de solutions de la forme

$$z(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a} \qquad \text{où} K \text{ parcourt } \mathbb{R}$$

Exercice 10 :

Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle :

$$\sqrt{2}y' - 2y = 1$$

Théorème 8 :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Le problème différentiel :

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution f, où f est une fonction défnie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) exp(ax) - \frac{b}{a}$$

Preuve

D'après le théorème précédent, l'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une infinité de solutions de la forme

$$z(x) = Kexp(ax) - \frac{b}{a} \qquad \text{K} \in \mathbb{R}$$

Si, de plus $y(0) = y_0$, alors z est solution si et seulement si $z(0) = y_0$
Or, $z(0) = Kexp(0) - \frac{b}{a} = K - \frac{b}{a}$ et :

$$K - \frac{b}{a} = y_0 \Longleftrightarrow K = y_0 + \frac{b}{a}$$

Ainsi le problème différentiel

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution f, où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) exp(ax) - \frac{b}{a}$$

III-2 Application

III-2.1 Exercice 1

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}.$$

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c . Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathsf{E}_1) : y' = \frac{y}{4}.$$

(a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

(b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

(c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathsf{E}_2)\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,}\\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

(a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

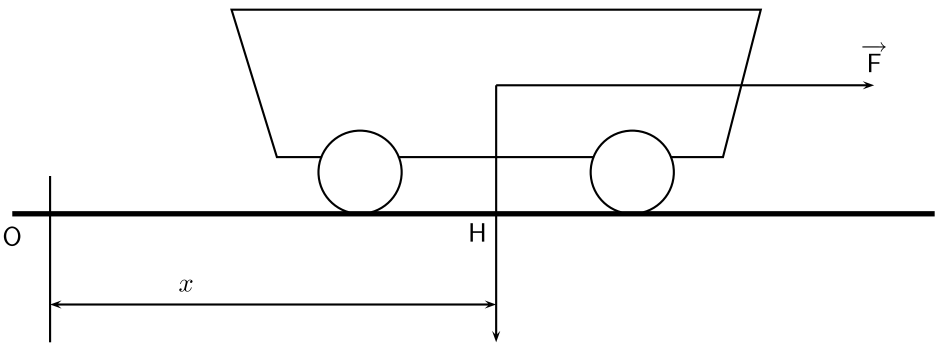
$$(\mathsf{E}_3)\left\{\begin{array}{lcl} h'(t) & = & -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,}\\ h(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

o h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

(b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

(c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

III-2.2 Exercice 2



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\overrightarrow{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles ? la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.
La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H ? l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$\text{(E)} \qquad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.

   Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $\quad v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.
   Résoudre l'équation différentielle (F).
2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
   (a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
   (b) En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16\mathrm{e}^{-t/8}$.
3. Calculer V $= \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale ? $90\,\%$ de sa valeur limite V ?
4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

III-2.3 Exercice 3 : problème se ramenant à une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Remarque : Proposé a la session de Juin 2010 en métropole, nous ne pouvons pas encore traité la dernière question de cet exercice ! Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} : \quad y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E′) : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E′).
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E′).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_k(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x}$$

où k est un nombre réel donné.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe reprsentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.
2. On note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient la courbe Γ d'quation $y = \mathrm{e}^{-x}$.
3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$;
   - la courbe $\mathscr{C}_k$ d'qéuation $y = (x + k)\mathrm{e}^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

   (a) Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

   (b) En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.
4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^2 (x + 2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Donner une interprtation graphique de cette intégrale.

ANNEXE 1 (Métropole-Juin 2010)
(à rendre avec la copie)