Chapitre 6

Complexes et géométries 2/2

Hors Sujet

Titre : « Le Horla »
Auteur : Guy de Maupassant
Présentation succinte de l'auteur : Le Horla est une nouvelle fantastique de Guy de Maupassant écrite en 1887. C'est un des premiers récits fantastiques que Guy de Maupassant a écrit. On peut très bien imaginer ce livre comme un journal intime, le narrateur s'y exprimant à la première personne. Il nous rapporte ses angoisses et troubles par une sorte de journal : il sent autour de lui la présence d'un être invisible qu'il nomme le « Horla ». Au début lucide, il sombre peu à peu dans la folie en cherchant à se délivrer de cette emprise. Il finira par incendier sa demeure et, dans les dernières lignes de la nouvelle, face à la persistance de cette présence, il entrevoit la mort comme ultime délivrance. L'aspect fantastique du récit vient du doute créé chez les lecteurs quant à la démence du narrateur – ou à la réalité des faits qu'il rapporte : sa cohabitation avec un être surnaturel. Dans ce livre le narrateur raconte sa folie et la terreur qu'il subit. Le Horla, un être surhumain, le terrasse chaque nuit et boit sa vie. Cette folie le conduira à de nombreuses actions, toutes plus insensées les unes que les autres. Il en viendra même à mettre le feu à sa maison et laissera brûler vif ses domestiques. Maupassant souffrait lui-même de troubles : il avait l'impression de se voir à l'extérieur de lui ou qu'il était étranger à la personne qu'il voyait dans le miroir. Le Horla est l'aboutissement d'une série de contes qui font référence à un sentiment de double puis à un être monstrueux ou surnaturel.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

I) Calculs de distances 3

II) Calculs d'angles 5

III) Caractérisation des principaux objets géométriques 7

III-1 Le cercle . . . 7

III-2 Triangle Isocèle . . . 7

III-3 Triangle rectangle . . . 7

III-4 Interprétation graphique du quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ . . . 8

IV) Forme complexe de transformations du plan 8

IV-1 Translation . . . 8

IV-2 Rotation . . . 9

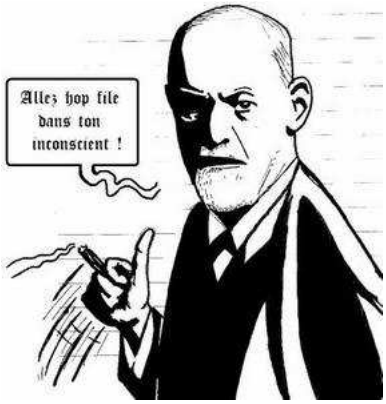
IV-3 Homothétie . . . 10

V) Nombre complexe et barycentre 11

VI) Lieux de points typiques 12

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 6



Complexes et géométries 2/2

Résumé

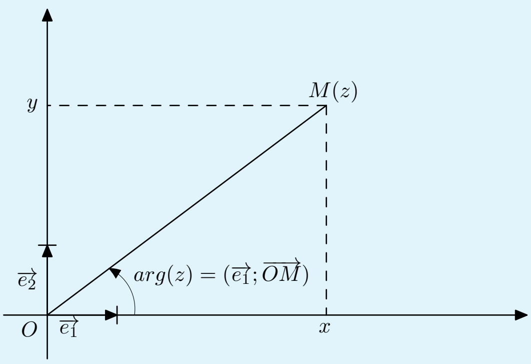
Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2.
Dans cette partie nous insisterons sur les applications géométriques des nombres complexes

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Quelques rappels

Rappels

1. Il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$
2. Tout nombre complexe z s'écrit, de manière unique, sous la forme $z = x + iy$ où x et y désignent deux entiers. On dit qu'il s'agit de l'écriture algébrique de z, x est appelée partie réelle de z et y partie imaginaire de z.
3. Tout nombre complexe z s'écrit (pas de manière unique) sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = \mid z \mid$ désigne le module de z et $\theta = arg(z)$ désigne un argument de z. On dit qu'il s'agit de la forme trigonométrique de z.
   Le module est la distance OM, et l'argument est l'angle $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM})$:



4. On note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, par conséquent tout nombre complexe s'écrit
$$z = re^{i\theta}$$
   Il s'agit ici de la forme exponentielle.
5. Notons que
$$\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercice 1. On considère les deux nombres complexes :

$$z = 1 + i \qquad \text{et} \qquad z' = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1. Déterminer le module et un argument de z et de z', puis en déduire les formes exponentielles de z et de z'.
2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes zz' et $\frac{z}{z'}$, puis en déduire leurs formes exponentielles.
3. Déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Solutions :

1. $\mid z \mid = \sqrt{2}$, de plus on sait que

$$z = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Par conséquent en identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\theta = 1 \\ \sqrt{2}\sin\theta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \theta = \frac{\pi}{4}[2\pi] \Longrightarrow z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

En procédant de la même manière pour z' on obtient : $\mid z' \mid = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, de plus on sait que

$$z' = \cos\theta' + i\sin\theta'$$

Par conséquent en identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient :

$$\begin{cases} \cos\theta' = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \theta' = \frac{\pi}{3}[2\pi] \Longrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

2. $\mid zz' \mid = \mid z \mid \times \mid z' \mid = \sqrt{2}$ et $arg(zz') = arg(z) + arg(z')[2\pi] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}[2\pi] = \frac{7\pi}{12}[2\pi]$. D'où

$$zz' = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

3. On peut aussi procéder ainsi :

$$\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

4. D'après (3), $\frac{z}{z'} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} - \sqrt{2}i\sin\frac{\pi}{12}$.
Mais on sait aussi que

$$\frac{z}{z'} = \frac{1+i}{\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(1+i)\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

On obtient par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

I) Calculs de distances

Rappelons que si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B alors

$$AB = \mid z_B - z_A \mid$$

Exemple :

Déterminons l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$$\mid z-2 \mid = \mid z+i \mid$$

Pour cela considérons les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = -i$, on a alors :

$$\mid z-2 \mid = \mid z+i \mid \Longleftrightarrow \mid z - z_A \mid = \mid z - z_B \mid \Longleftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble recherché est donc la médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 1 :

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :
$$\mid z - 3i \mid = 2$$
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :
$$\mid z-2 \mid = \mid 2z+i \mid$$

Solutions :

1. En considérant le point C d'affixe $z_C = 3i$ on obtient :
$$\mid z - 3i \mid = 2 \Longleftrightarrow \mid z - z_C \mid = 2 \Longleftrightarrow CM = 2$$
L'ensemble recherché est donc le cercle de centre C et de rayon 2.
2. En considérant les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = -\dfrac{i}{2}$ on obtient :
$$\mid z-2 \mid = \mid 2z+i \mid \Longleftrightarrow \mid z-2 \mid = \mid 2(z - z_B) \mid \Longleftrightarrow \mid z - z_A \mid = 2 \mid z - z_B \mid \Longleftrightarrow MA = 2MB$$
Pour conclure on utilisera la méthode générale rappelée ci-après.

Méthode :

Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $MA = kMB$ avec $k \in \mathbb{R}^{+*}$ et $k \neq 1$
On utilise les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lcc} & & MA = kMB \\ \Longleftrightarrow & & MA^2 = k^2MB^2 \\ \Longleftrightarrow & \overrightarrow{MA}^2 = k^2\overrightarrow{MB}^2 & \text{en effet on a } MA^2 = \parallel \overrightarrow{MA} \parallel^2 = \overrightarrow{MA}^2 \\ \Longleftrightarrow & & \overrightarrow{MA}^2 - k^2\overrightarrow{MB}^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow & & \left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0 \end{array}$$

Introduisons le barycentre G_1 de $(A, 1)$ et $(B, -k)$ et le barycentre G_2 de $(A, 1)$ et (B, k) [a]
On a dans ce cas :

$$\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = (1-k)\,\overrightarrow{MG_1} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1+k)\,\overrightarrow{MG_2}$$

ainsi :

$$\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0 \Longleftrightarrow (1-k)\,\overrightarrow{MG_1} \cdot (1+k)\,\overrightarrow{MG_2} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

[a] Ces deux barycentres existent car $1 - k \neq 0$ et $1 + k \neq 0$

Quelques rappels

On rappelle deux propriétés du produit scalaire :

1. On considère un repère orthonormal, un vecteur $\vec{u}(x; y)$ et un vecteur $\vec{v}(x'; y')$.
   On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ définit par :
   $$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$
2. Dans un repère orthonormal, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow xx' + yy' = 0$

On rappelle deux propriétés du barycentre :

1. le point G défini par :
   $$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$
   est appelé barycentre de deux points pondérés (A, α) et (B, β)
2. Soit α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. On a :
   $$\text{G barycentre de } (A, \alpha) \text{ et } (B, \beta) \Longleftrightarrow \forall M \text{ point du plan, } \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

II) Calculs d'angles

Théorème 1 :
Si A et B sont deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives z et z' alors :

$$\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB}\right) = arg(z'-z)[2\pi]$$

Preuve
Soit $M(z'')$ le point tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Ainsi :

$$\left(e_1;\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{OM}\right) = arg(z'')[2\pi]$$

De plus

$$z'' = z_{\overrightarrow{OM}} = z_{\overrightarrow{AB}} = z'-z$$

Par conséquent $\left(e_1;\overrightarrow{AB}\right) = arg(z'-z)[2\pi]$

Exemple :
On donne $A(1)$ et $B(2,i\sqrt{3})$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(e_1;\overrightarrow{AB}\right)$.
On a :

$$b-a = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

d'où :

$$\left(e_1;\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Théorème 2 :
Si A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives a, b, c et d alors :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$$

Preuve
Les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont respectivement $b-a$ et $d-c$.
D'après le résultat précédent :

$$arg(b-a) = \left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi] \qquad \text{et} \qquad arg(d-c) = \left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{DC}\right)[2\pi]$$

Or, d'après la relation de Chasles sur les angles :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{e_1}\right) + \left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{CD}\right)[2\pi] = \left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$$

Et d'après les propriétés des arguments :

$$arg(d-c) - arg(b-a) = arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$$

Au final :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$$

Corollaire 1 :

$A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ étant 4 points du plan, deux à deux distincts, on a :

1. $$(AB) \perp (CD) \iff \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$$

2. $$(AB)//(CD) \iff \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}$$

Preuve

1. On a :

$$\begin{aligned} & (AB) \perp (CD) \\ \iff \quad & \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ \iff \quad & arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ \iff \quad & \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} & (AB)//(CD) \\ \iff \quad & \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = 0[\pi] \\ \iff \quad & arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0[\pi] \\ \iff \quad & \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Remarque : En particulier si $A \neq C$ on a :

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est un imaginaire pur } \iff \text{ les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés}$$

Exemple :

On donne $A(5+3i)$ et $B(5-8i)$. Le triangle OAB est-il rectangle en O ?
D'après ce qui précède :

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = arg\left(\frac{b}{a}\right)\ [2\pi]$$

Or

$$\frac{b}{a} = \frac{5-8i}{5+3i} = \frac{1-55i}{34} \notin i\mathbb{R}$$

Donc les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires

III) Caractérisation des principaux objets géométriques

III-1 Le cercle

Le cercle de centre A est de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance r de A, par conséquent :

Propriété 1 : *caractérisation d'un cercle*

$$M(z) \in \mathscr{C}(A, r) \Longleftrightarrow \mid z - z_A \mid = r$$

Propriété 2 :

Dans le plan complexe, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r et un point M d'affixe z. Alors :

$$M(z) \in \mathscr{C} \Longleftrightarrow z = \omega + re^{i\theta} \quad \text{avec}\theta \in [0; 2\pi[$$

Preuve

On sait que $M(z) \in \mathscr{C} \Longleftrightarrow M\Omega = r \Longleftrightarrow |z - \omega| = r$.
On appelle θ la mesure principal $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{\Omega M}\right)$. Alors : $M(z) \in \mathscr{C} \Longleftrightarrow z - \omega = re^{i\theta}$.

Remarque : Cette égalité est appelée équation paramétrique du cercle $\mathscr{C}$.

Exemple :

L'ensemble des points d'affixes $z = 4i + 2 + 3e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$ représente le cercle de centre $\Omega(4i + 2)$ et de rayon 3.

III-2 Triangle Isocèle

ABC est un isocèle de sommet principal A si et seulement si $AB = AC$ donc :

Propriété 3 : *Triangle Isocèle*

ABC est isocèle de sommet principal $A \Longleftrightarrow \mid z_B - z_A \mid = \mid z_C - z_A \mid \Longleftrightarrow \mid \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \mid = 1$

III-3 Triangle rectangle

On peut encore parler distance grâce au théorème de Pythagore

$$|z_C - z_B|^2 = |z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2$$

ou angle droit : mais c'est l'angle géométrique qui nous intéresse, donc nous travaillerons modulo π

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}\right) = -\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}\right) = -arg(z_{\overrightarrow{AB}}) + arg(z_{\overrightarrow{AC}}) = arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

Propriété 4 :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \Longleftrightarrow arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

III-4 Interprétation graphique du quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

Il suffit de remarquer que $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$. Donc vous utiliserez le fait que

- $arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
- $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB}$

Dans d'autres cas, vous serez confrontés à l'interprétation d'une égalité du style $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$ qui se traduit par $z_{\overrightarrow{AC}} = \lambda z_{\overrightarrow{AB}}$, donc

- si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ et donc A, B et C sont alignés.
- si $\lambda \in i\mathbb{R}$, $z_{\overrightarrow{AC}} = \pm|\lambda| i z_{\overrightarrow{AB}}$ et donc $arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2} + arg\left(z_{\overrightarrow{AC}}\right)$ $[2\pi]$ c'est à dire $(AC)\perp(AB)$
- si $\lambda = \pm i$, alors le triangle ABC est isocèle et rectangle en A
- si $\lambda = e^{\pm i\pi/3}$, alors le triangle ABC est équilatéral

IV) Forme complexe de transformations du plan

Considérons une fonction f définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous pouvons associer à cette fonction f la transformation ponctuelle T qui à chaque point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

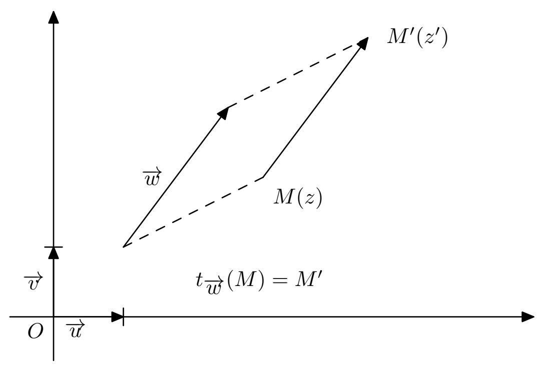
IV-1 Translation

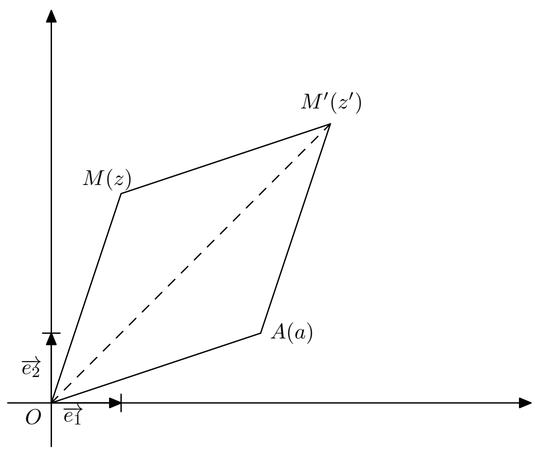
Théorème 3 : *Ecriture complexe d'une translation*

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, d'affixe a, transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :

$$z' = z + a$$

Remarque : Ajouter un nombre a c'est translater d'un vecteur d'affixe a





Preuve

Dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ signifie que :

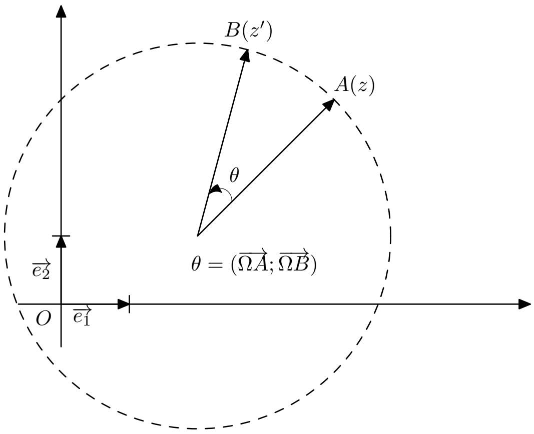
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \iff z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\overrightarrow{u}} \iff z' - z = a \iff z' = z + a$$

IV-2 Rotation

Théorème 4 : *Ecriture complexe d'une rotation*

La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$$



Preuve

Si $M = \Omega$ la relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ est triviale. Supposons que $M \neq \Omega$.
Dire que M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ signifie :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \mid z'-\omega \mid = \mid z-\omega \mid \iff \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

Ainsi on obtient :

$$\frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$$

Exemples :

La rotation qui associe à un nombre complexe z le nombre z' suivant : $z'-3+i = i(z-3+i)$ est la rotation de centre $\Omega(3-i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Remarque : Quelques cas particuliers :

– Si $\Omega = O$ alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' = e^{i\theta}z$$

– Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (quart de tour de sens direct), alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z'-\omega = i(z-\omega)$$

– Si $\Omega = O$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' = iz$$

– Cas du **triangle équilatéral**. Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respectives z_A, z_B et z_C.

$$\text{ABC est un triangle équilatéral de sens direct} \iff z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$

En effet, c'est équivalent à dire que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Exercice 2 :

on donne deux points distincts $A(a)$ et $B(b)$. On construit le carré $ABCD$ de sens direct. Quelle est l'affixe ω du centre Ω du carré $ABCD$?

Exercice 3 :

Soit $\overrightarrow{u}(x;y)$ un vecteur du plan (non nul) et $\overrightarrow{v}(x';y')$ tels que

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| \\ (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ en fonction de celles de $\overrightarrow{u}$ [a]

[a] On notera z l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$ et z' celle du vecteur $\overrightarrow{v}$ et puis on remarquera que l'on a $z' = iz$...

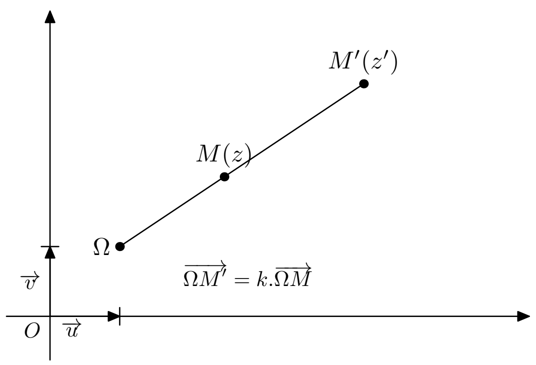
Exercice 4 :

Etant donnés $N(1+i)$ et $P(2-3i)$, déterminer les affixes des points M tels que MNP soit équilatéral.

IV-3 Homothétie

Définition 1 :

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k ($k \neq 0$) la transformation pour laquelle un point M du plan a pour image M' tel que $\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega M'}$



Théorème 5 : *Ecriture complexe d'une homothétie*

L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

Preuve

Dire que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k signifie :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

Ce qui se traduit bien, en termes d'affixes, par :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

Exemple :

Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = -\frac{5}{2}z + 2i$.

- On résout $z = f(z) \iff z = \frac{4}{7}i$.

  La transformation f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \frac{4}{7}i$.
- On exprime $z' - \omega$ en fonctino de $z - \omega$.

  On a $\begin{cases} z' = -\frac{5}{2}z + 2i \\ \omega = -\frac{5}{2}\omega + 2i \end{cases} \Leftarrow z' - \omega = -\frac{5}{2}(z - \omega)$.

  Donc f est une homothétie de centre $\Omega\left(\frac{4}{7}i\right)$ et de rapport $-\frac{5}{2}$

Méthode pour reconnaître une transformation

La démarche ci-contre fait figure de méthode. Lorsqu'on a affaire à une transformation du plan f dont l'écriture complexe est :

$$z' = az + b$$

on commence par rechercher son éventuel point fixe :
- Si $a = 1$ et $b = 0$, alors f est l'identité (tous les points du plan sont fixes)
- Si $a = 1$ et $b \neq 0$, il n'y a pas de point fixe et f est une translation.
- si $a \neq 1$, il y a un unique point fixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

  Dans ce cas, si a est un réel, f est une homothétie de rapport a. Si a est complexe de module 1 ($a = e^{i\theta}$), f est un rotation d'angle θ. Plus généralement $a = Re^{i\theta}$, f est une similitude (voir cours de spécialité).

Exercice 5 :

Reconnaître les transformations du plan qui au point $M(z)$ associe le point $M_k(z_k)$ tel que :

$$z_1 = z - 3 + 2i \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z \qquad z_3 = -z \qquad z_4 = 2(z-i) + i \qquad z_5 = -iz \qquad z_6 + 1 = iz + i$$

V) Nombre complexe et barycentre

Théorème 6 :

Soit G le barycentre de n points pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n) avec donc $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$.

Notons z_p l'affixe de A_p pour $1 \leq p \leq n$, alors l'affixe z_G de G est donnée par :

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

L'affixe du barycentre est la moyenne (pondérée) des affixes des points

Preuve

Cela découle directement de la définition du barycentre et donc de l'égalité :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

Remarque : En particulier si on considère des points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$, on a :
- affixe du milieu de $[AB]$: $\dfrac{a+b}{2}$

– affixe du centre de gravité du triangle ABC : $\dfrac{a+b+c}{3}$

Exercice 6 :

ABC est un triangle de sens direct. On construit le point P tel que :

$$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AP}\right)=\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad AP=BC$$

On construit de même les points Q et R tels que :

$$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BQ}\right)=\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad BQ=CA$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CR}\right)=\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad AB=CR$$

Démontrer que le triangle PQR a le même centre de gravité que ABC.

Solutions :

On a donc :

$$p-a=i(c-b)$$
$$q-b=i(a-c)$$
$$r-c=i(b-a)$$

En additionnant membre à membre ces trois égalités, il vient :

$$p+q+r=a+b+c$$

On en déduit que les deux triangles ont le même centre de gravité.

VI) Lieux de points typiques

Soient A et B deux points distincts du plan.

– Ensemble des points M tels que $AM=k$, avec $k\in\mathbb{R}$:
  - Si $k>0$: cercle de centre A et de rayon k
  - Si $k=0$: point A
  - Si $k<0$: Ensemble vide

– Ensemble des points M tels que $MA=MB$:

Médiatrice de $[AB]$

– Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=0\,[\pi]$:

Droite (AB) privée de A et B.

– Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=0\,[2\pi]$:

Droite (AB) privée du segment $[AB]$

– Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\pi\,[2\pi]$:

Segment $[AB]$

- Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}\,[\pi]$:

Cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

- Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$:

Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B et tel que MAB soit direct.

- Ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$:

Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B et tel que MAB soit indirect.

- Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$:

Cercle de diamètre $[AB]$

Remarques :
- Un angle orienté n'est défini que si les deux vecteurs ne sont pas nuls. C'est pourquoi les points A et B doivent être retirés le cas échéant, des ensembles ci-dessus.
- Dans un produit scalaire, les vecteurs peuvent très bien être nuls, c'est pour cela, qu'ici, on ne retire pas les points A et B.

Enigme[1] : Trouver l'erreur dans le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcl} & & e^{i2\pi}=1 \\ & \iff & \left(e^{i2\pi}\right)^x=1^x=1 \\ & \iff & e^{i2\pi x}=1 \\ \text{pour } x=\frac{1}{4} \text{ on obtient :} & & e^{i\frac{\pi}{2}}=1 \\ \text{d'où :} & & i=1 \end{array}$$

1. Réponse : La relation $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ n'est valable que si $n\in\mathbb{Z}$