Chapitre 11

Barycentre

Hors Sujet

Titre : « Label : Musique electronique »
Auteur : Steve Beckett et Rob Mitchell
Présentation succinte de l'auteur : Warp Records est un label musical britannique indépendant, fondé en 1989 à Sheffield, en Yorkshire, connu pour avoir découvert un certain nombre d'artistes de musique électronique. Warp Records tire son origine d'un magasin de musique électronique installé en 1987 dans un hangar désaffecté à la périphérie de Sheffield et ayant ouvert ses rayons à la scène bleep Acid House. Le label Warp Records (Warp pour Weird And Radical Projects ou encore We Are Reasonable People selon d'autres sources) a été créé par Steve Beckett et Rob Mitchell en 1989. Warp Records poursuivit en publiant à partir de 1992 une série de singles et d'albums sous le titre Artificial Intelligence, des productions d'artistes comme Aphex Twin (sous les pseudonymes Diceman et Polygon Window), Autechre, Black Dog Productions, Richie Hawtin et Alex Paterson (qui rejoindra plus tard The Orb). Depuis, le label a évolué et les derniers artistes en date forment un groupe éclectique, depuis le DJ Andrew Weatherall (Sabres of Paradise et Two Lone Swordsmen), le groupe live Red Snapper et le groupe de hip-hop expérimental Antipop Consortium. À la fin des années 1990, Warp Records s'est déplacé à Londres. En janvier 2004, le label a lancé un magasin de musique en ligne, Bleep.com, notable pour être l'un des seuls labels à éviter totalement l'utilisation de gestion numérique des droits dans les pistes en téléchargement. En une quinzaine d'années, Warp Records a eu une grande influence sur la musique électronique expérimentale, grâce à des artistes comme LFO, Aphex Twin, Squarepusher, Plaid, Autechre ou Boards of Canada. Le label a développé, à l'instar de quelques prédécesseurs comme Factory Records, Mute Records ou encore Sarah Records, une identité visuelle reconnaissable et forte, accentuée par le soin apporté aux vidéo-clips de ses artistes, qui ont contribué à le faire connaître, comme par exemple Come to Daddy ou Windowlicker d'Aphex Twin, réalisés par Chris Cunningham, le travail de Daniel Lévi sur le clip de Freak de LFO ou les essais de Jarvis Cocker pour des clips de Nightmares on Wax.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

LEÇON 11

Barycentre

Résumé

Dans ce chapitre, il s'agit d'étendre à l'espace les propriétés rencontrées sur le barycentre dans le plan.

Les résultats établis ci-dessous sont valables aussi bien en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace. Aussi, nous ne préciserons pas si les points considérés appartiennent au plan ou à l'espace (sauf lorsque nous passerons aux coordonnées).

I) Barycentre de n points pondérés

I-1 Définition, existence et unicité du barycentre

Théorème 1 :
Soient $A_1,\ A_2 ..., A_n$ n points distincts du plan ou de l'espace. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$, alors on appelle barycentre des points $A_1,\ A_2 ..., A_n$ affectés des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ l'unique point G vérifiant :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

Preuve
On a :

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \\
\iff \quad & \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_1} + \alpha_n \overrightarrow{A_1A_n} = \vec{0} \\
\iff \quad & (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\overrightarrow{GA_1} = \alpha_2 \overrightarrow{A_2A_1} + \alpha_3 \overrightarrow{A_3A_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_nA_1} \\
\iff \quad & \overrightarrow{GA_1} = \frac{\alpha_2 \overrightarrow{A_2A_1} + \alpha_3 \overrightarrow{A_3A_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_nA_1}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}
\end{aligned}$$

Or, nous savons qu'étant donné un point A_1 et un vecteur $\vec{v}$ [a], il existe un unique point G tel que

$$\overrightarrow{A_1G} = \vec{v}$$

Ainsi G existe et est unique.

a. Ici $\vec{v} = \dfrac{\alpha_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$

. **Remarques :**

– On note usuellement : $G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline \end{array}$

– Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ on dit que G est l'isobarycentre (ou centre de gravité) des points A_1 ; A_2 ; … ; A_n.
  – L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment [AB].
  – L'isobarycentre de trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC (i.e le point d'intersection des médianes).

I-2 Réduction d'une somme vectorielle

Soit M un point quelconque du plan ou de l'espace, on cherche à simplifier :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i}$$

Notons $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

<u>1^er cas</u> : $m \neq 0$.

Dans ce cas on sait que le barycentre $\mathrm{G} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \dots & \mathrm{A}_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline \end{array}$ existe et est unique.

On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{\mathrm{MG}} + \overleftarrow{\mathrm{GA}_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MG}} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{GA}_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MG}} = m\overrightarrow{\mathrm{MG}}$$

Théorème 2 :

On considère $\mathrm{G} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \dots & \mathrm{A}_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline \end{array}$ $(m \neq 0)$, alors pour tout point M du plan ou de l'espace, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i} = m\overrightarrow{\mathrm{MG}}$$

<u>2^ème cas</u> : $m = 0$.

Dans ce cas le barycentre G n'existe pas, cependant, pour tout point N du plan ou de l'espace on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{\mathrm{MN}} + \overrightarrow{\mathrm{NA}_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MN}} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{NA}_i} = 0 \times \overrightarrow{\mathrm{MN}} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{NA}_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{NA}_i}$$

Au final la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i}$ est indépendante du point M et représente toujours le même vecteur.

Remarque : Les résultats précédents sont remarquables dans le sens où ils permettent de réduire une somme de n vecteurs à un seul vecteur, ce qui facilite, par exemple, la recherche de lieux géométriques comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 1 :

ABCD est un carré. Déterminer les lieux géométriques suivants :

1. $\mathscr{E} = \left\{ \text{M tels que } \left\| 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \right\| = \mathrm{AB} \right\}$
2. $\mathscr{E}' = \left\{ \text{M tels que } 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MC}} \text{ soient colinéaires.} \right\}$
3. $\mathscr{E}'' = \left\{ \text{M tels que } \left\| 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \right\| = \left\| \overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MC}} \right\| \right\}$

Solutions :

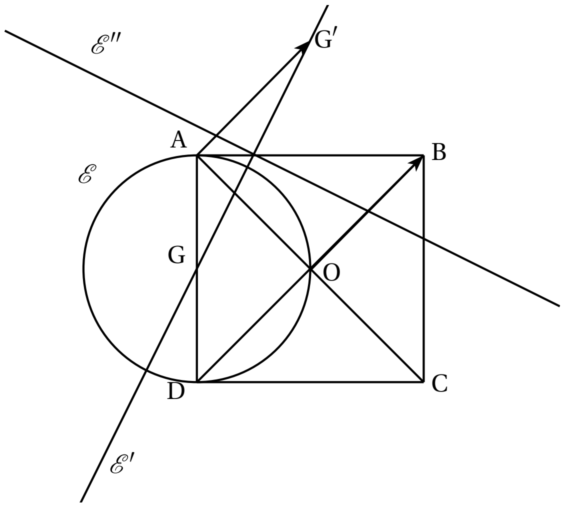
1. Notons : $G = \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & -1 & 1 \\ \hline\end{array}$

   On a alors :
   $$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG}\right\|$$
   Et on cherche donc l'ensemble des points M tels que :
   $$MG = \frac{AB}{2}$$
   Il s'agit du cercle de centre G et de rayon $\frac{AB}{2}$.

2. En notant $G = \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ \hline\end{array}$

   On a alors $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG'}$, ainsi on cherche M tels que :
   $$\overrightarrow{MG} = k\overrightarrow{MG'}$$
   Il s'agit donc de la droite (GG').

3. Enfin on cherche M tel que : $MG = MG'$, ainsi l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[GG']$.



II) Propriétés du barycentre

II-1 Homogénéité

Propriété 1 :

Le barycentre reste inchangé si l'on remplace les coefficients par des coefficients proportionnels non nuls.

Preuve

Si $k \neq 0$ et alors :

$$G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline\end{array} \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^{n} k\alpha_i \overrightarrow{GA_i} \iff G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline k\alpha_1 & k\alpha_2 & \dots & k\alpha_n \\ \hline\end{array}$$

II-2 Associativité

Propriété 2 :

On ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (non nulle) des coefficients correspondants.

Exemple :

$G = bar\{(A,1),(B,2),(C,3)\} = bar\{(G',3),(C,3)\}$ où $G' = bar\{(A,1),(B,2)\}$.
Et finalement, on s'aperçoit que G est le milieu de $[G'C]$.

Preuve

Soit $G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline\end{array}$ et $G' = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \hline\end{array}$ avec $p \leq n$ et $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, $m' = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$.
On a donc, pour tout point M du plan ou de l'espace :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = m\overrightarrow{MG} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = m'\overrightarrow{MG'}$$

On souhaite montrer que $G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline G' & A_{p+1} & \dots & A_n \\ \hline m' & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \\ \hline\end{array}$ i.e que $m\overrightarrow{GG'} + \sum_{i=p+1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Or, :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \iff m\overrightarrow{MG} = m'\overrightarrow{MG'} + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

Ce qui donne pour $M = G$:

$$\vec{0} = m\overrightarrow{GG'} + \sum_{i=p+1}^{n} \overrightarrow{GA_i}$$

Exercice 2 :

ABCD est un tétraèdre et $G = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline\end{array}$

Situer G.

II-3 Coordonnées

On sait que pour point M du plan ou de l'espace, si $\mathrm{G} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \dots & \mathrm{A}_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline \end{array}$ alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i} = m\overrightarrow{\mathrm{MG}}$$

Dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour $\mathrm{M} = \mathrm{O}$, il vient :

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA}_i}}{m}$$

On utilise cette relation pour déterminer les coordonnées du barycentre, coordonnées qui représentent les moyenne pondérées des coordonnées des points du système.

Exercice 3 :

On donne $\mathrm{A}(1;0;-1)$, $\mathrm{B}(2;1;1)$ et $\mathrm{C}(0;2;3)$. Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

Solutions :

$\mathrm{G} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ par conséquent :

$$\mathrm{G}\left(\frac{1+2+0}{3}; \frac{0+1+2}{3}; \frac{-1+1+3}{3}\right)$$

i.e

$$\mathrm{G}\,(1;1;1)$$

III) Lien entre le barycentre et les droites et les plans

Théorème 3 :
Soient A et B deux points distincts. On considère le système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ avec $\alpha+\beta\neq 0$.

1. Le barycentre G de $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ est situé sur la droite (AB).
2. La droite (AB) est l'ensemble des barycentres du système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.

Preuve

1. $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ donc
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
Par conséquent (en utilisant la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$
ce qui montre que $G\in(AB)$
2. Soit M un point de la droite (AB), dans ce cas les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinaires, par conséquent il existe un réel k tel que :
$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Longleftrightarrow\overrightarrow{AM}-k\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Longleftrightarrow(k-1)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
Comme $k-1-1\neq 0$, il vient : $M = bar\{(A,k-1),(B,-1)\}$

Théorème 4 :
Soient A, B et C trois points non alignés (et a fortiori distincts deux à deux). On considère le système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

1. Le barycentre G de $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ est situé dans le plan (ABC).
2. Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres du système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

Preuve

1. Comme $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ on a :
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
En utilisant la relation de Chasles on trouve :
$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha+\beta+\gamma}$$
Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires donc $G\in(ABC)$
2. Soit M un point quelconque du plan (ABC). Montrons que M est un certain barycentre de A, B et C. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, donc il existe deux réels λ et μ tels que :
$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}\Longleftrightarrow(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{AM}+\lambda\overrightarrow{BM}+\mu\overrightarrow{CM}=\vec{0}\Longleftrightarrow M=bar\{(A,1-\lambda-\mu),(B,\lambda),(C,\mu)\}$$

Théorème 5 :
Le segment [AB] est l'ensemble des barycentres A et B à coefficients positifs. De même l'intérieur d'un triangle ABC est l'ensemble des barycentres de A, B et C à coefficients strictement positifs.

Preuve

Démontrons le premier résultat.
Si $\alpha = 0$ alors $G = B$, dans le cas contraire si donc $\alpha \neq 0$, on a :

$$G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\} \Longleftrightarrow G = bar\left\{(A,1),\left(B,\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}$$

Ainsi :

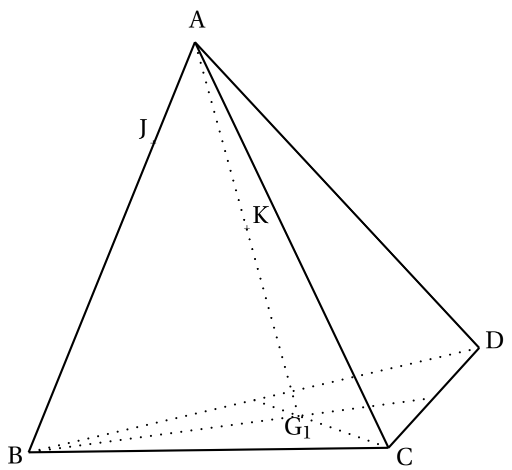
$$\overrightarrow{GA} + \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{GB}$$

Si $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GB}$ ont même sens et $G \in [AB]$, sinon $G \notin [AB]$.

Exercice 4 :

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [CD], J le point de [AB] tel que $AB = 4AJ$, G_1 le centre de gravité du triangle BCD et, enfin K est le milieu de $[AG_1]$.
Montrer que les points I, J et K sont alignés. [a]

a. On montrera, par exemple, qu'un point est le barycentre d'un système formé par les deux autres points.



Exercice 5 :

On considère un tétraèdre ABCD, on définit les points P, Q, R et S respectivement situés sur les arêtes [AB], [AD], [CB] et [CD] par :

$$AP = \frac{1}{3}AB \qquad AQ = \frac{1}{3}AD \qquad CR = \frac{1}{3}CB \qquad \text{et} \qquad CS = \frac{1}{3}CD$$

Soit I et J les milieux de [AC] et [BD]. Montrer que (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes. [a]

a. Essayons de construire un barycentre G de A, B, C et D tel qu'en appliquant le théorème d'associativité, on obtienne G comme barycentre de Q et R puis G barycentre de I et J et enfin barycentre de P et S.