EXERCICES : BAC

I) Suite-Métropole Juin 2010

1. **Restitution organisée de connaissances**

   Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

   Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.
   Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.
   Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

   Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ?
   Justifier les réponses.
   (a) $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;
   (b) $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$;
   (c) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3. On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entie naturel n non nul par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$.
   Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

II) Probabilité-Métropole Juin 2010

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :
   - $\dfrac{21}{40}$
   - $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{1}{3}$
   - $\dfrac{7}{10} \times \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{3}$

2. De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à :
   - $\dfrac{3^3 \times 7^2}{10^5}$
   - $\dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^3$
   - $\dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^3 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2$

3. De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraèdrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1.
   Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :
   - $\dfrac{7}{60}$
   - $\dfrac{14}{23}$
   - $\dfrac{\dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4}}$

4. On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'évènement $[1 \leqslant X \leqslant 3]$ est égale à :

- $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$
- $e^{-3\lambda} - e^{-\lambda}$
- $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$

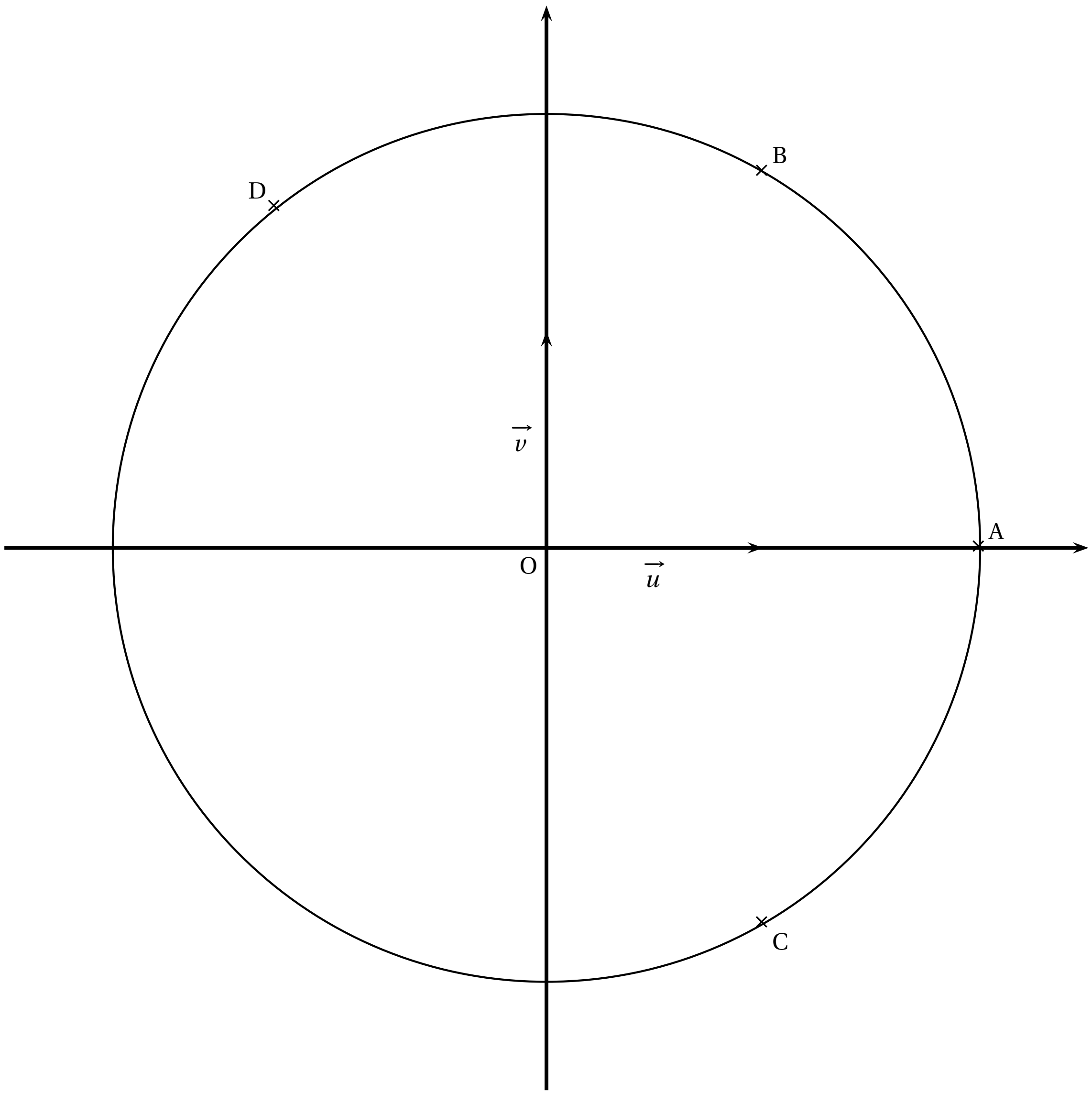
III) Complexe-Métropole Juin 2010

Dans tout l'exercice, $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).
On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

1. On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $-\overline{z} + 2$.
   (a) Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1 + i\sqrt{3}$.
   (b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.
   (c) Déterminer l'image par la transformation T du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
2. $\mathscr{C}'$ désigne le cercle de centre O′ d'affixe 2 et de rayon 1.
   (a) Construire le point A′ appartenant au cercle $\mathscr{C}'$ tel que : $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ [modulo 2π].
   (b) A tout point M du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe z, on associe le point M′ du cercle $\mathscr{C}'$ d'affixe z' tel que : $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ [modulo 2π].
   Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z'-2}{z}$. En déduire que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$.
   (c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   A tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment [MM′].
   Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

ANNEXE
(**à rendre avec la copie**)



IV) Analyse - Amérique du Sud 2010

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{1+x}\, \mathrm{d}x.$$

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0\,;1]$.
2. On pose, pour tout entier naturel $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{5}\right)$.
   (a) Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a :
   $$\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$
   Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.
   (b) En déduire que : $\dfrac{1}{5}\mathrm{S}_4 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}(\mathrm{S}_5 - 1)$.
   (c) Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.
   En déduire l'encadrement : $1,091 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\, \mathrm{d}x \leqslant 1,164$.
3. (a) Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$, on a : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$.
   (b) Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x + \mathrm{I}$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$.
   (d) En déduire un encadrement de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\, \mathrm{d}x$ d'amplitude strictement infèrieure à 10^{-1}.

V) Complexe-Amérique du Sud 2010

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B et P les points d'affixes respectives $a = 5 + 5\mathrm{i}$, $b = 5 - 5\mathrm{i}$ et $p = 10$.
On considère un point M, distinct de O, d'affixe z.
On note U le point d'affixe u, image du point M par la rotation $\mathrm{R_A}$ de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
On note T le point d'affixe t, image du point M par la rotation $\mathrm{R_B}$ de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit D le symétrique du point M par rapport à O.

1. Démontrer que l'affixe du point U est $u = \mathrm{i}(10 - z)$; exprimer en fonction de z l'affixe du point T puis justifier que le quadrilatère MUDT est un parallélogramme de centre O.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\overline{z} - 5z - 5\overline{z} = 0$.
   Justifier que le quadrilatère OAPB est inscrit dans Γ.
3. On suppose que le point M est distinct de O, A et P. Les points O, M et U sont donc distincts deux à deux.
   (a) Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\dfrac{u}{z} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$.
   (b) Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si M appartient à Γ.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère MUDT ?

5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{u}{z}$ soit un imaginaire pur. En déduire la nature du quadrilatère MUDT dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P.
   Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que MUDT soit un carré.

VI) Probabilité - Amérique du sud 2010

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les événements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

$$\mathrm{P(F) = P(A)}, \quad \mathrm{P(F)} = \frac{1}{2}\mathrm{P(C)} \quad \text{et } \mathrm{P(C) = P(I)}.$$

1. Calculer les quatre probabilités P(F), P(A), P(C) et P(I).
2. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet événement, noté S :

$$\mathrm{P_F(S)} = 0,2 \quad ; \quad \mathrm{P_A(S)} = 0,5 \quad ; \quad \mathrm{P_C(S)} = 0,1 \quad ; \quad \mathrm{P_I(S)} = 0,4$$

   (a) Déterminer $\mathrm{P(S \cap A)}$.
   (b) Montrer que $p(\mathrm{S}) = \frac{17}{60}$.
   (c) L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.
3. Sur 1000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

   (a) On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose : $d^2 = \sum_{k=1}^{k=3}\left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$. Calculer d^2 puis $1000d^2$.
   (b) On simule 3000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi {1 ; 2 ; 3} avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations on obtient une valeur de $1000d^2$. Voici les résultats :

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0,0005	0,0763	0,2111	0,48845	0,9401	1,5104	5,9256

   Au risque 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable ?