Exercices : Suites et récurrence

Exercice 1. 2008 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

   On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :

   $$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{o } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux rels.}$$

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
   Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie B On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.
   (a) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.
2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Solutions **:**

Partie A

1.

$$\begin{aligned}(t_n)\in(E) &\Longleftrightarrow \quad t_{n+1}-t_n=0,24t_{n-1}\\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda^{n+1}-\lambda^n=0,24\lambda^{n-1}\\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda^{n-1}(\lambda^2-\lambda-0,24)=0\\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda^2-\lambda-0,24=0 \qquad \text{en effet } \lambda\neq 0 \Longleftrightarrow \lambda^{n-1}\neq 0\end{aligned}$$

Remarque : Il est bien clair que $\lambda^{n-1}\times\lambda^2=\lambda^{n-1+2}=\lambda^{n+1}$ ainsi que $\lambda^{n-1}\times\lambda=\lambda^{n-1+1}=\lambda^n$ Les suites $(t_n)\in(E)$ vérifient donc l'équation :

$$\lambda^2-\lambda-0,24=0$$

$\Delta=1+4\times 0,24$ et donc

$$t_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=1,2 \qquad \text{et} \qquad t_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-0,2$$

Il y a donc deux suites (t_n) qui appartiennent à l'ensemble (E) :

$$t_n=1,2^n \qquad \text{et} \qquad t'_n=(-0,2)^n$$

2. Comme $(u_n)\in(E)$ et comme $u_0=6$ on a :

$$\alpha+\beta=6$$

De plus comme $u_1=6,6$ on a aussi :

$$1,2\alpha-0,2\beta=6,6$$

Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ 1,2\alpha-0,2\beta=6,6\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha=6-\beta\\ 1,2(6-\beta)-0,2\beta=6,6\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha=6-\beta\\ -1,4\beta=6,6-7,2=-0,6 \Longleftrightarrow \beta=\dfrac{6}{14}=\dfrac{3}{7}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha=6-\dfrac{3}{7}=\dfrac{39}{7}\\ \beta=\dfrac{3}{7}\end{cases}$$

Par conséquent

$$u_n=\frac{39}{7}(1,2)^n+\frac{3}{7}(-0,2)^n$$

3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}1,2^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0,2)^n=0$ on en déduit immédiatement que :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

Solutions **:**

Partie B

1. (a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1,4 - 0,1x$$

$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 1,4 > 0,1x \Longleftrightarrow x < \dfrac{1,4}{0,1} = 14$ Par conséquent f est strictement croissante sur $[0;8]$.

(b) Notons $\mathscr{P}(n)$: $0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8$

– *Initialisation* : pour $n = 0$, on a $v_0 = 6$ et $v_1 = 1,4 \times v_0 - 0,05 \times v_0^2 = 6,6$ et on a bien :

$$0 \leq v_0 < v_1 \leq 8$$

$\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.

– *Hérédité* : Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8$$

Comme la fonction f est strictement croissante sur $[0;8]$ on a :

$$f(0) \leq f(v_n) < f(v_{n+1}) \leq f(8) \Longleftrightarrow 0 \leq v_{n+1} < v_{n+2} \leq 8$$

La propriété $\mathscr{P}$ est donc vraie au rang $n+1$, elle est donc héréditaire, par conséquent : pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.

2. La suite (v_n) est croissante et majorée d'après la question précédente, par conséquent elle est convergente. Notons ℓ sa limite. De plus, comme $v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$, lorsque n tend vers $+\infty$ on obtient :

$$\ell = 1,4\ell - 0,05\ell^2 \Longleftrightarrow 0,05\ell^2 - 0,4\ell = 0 \Longleftrightarrow 5\ell^2 - 40\ell = 0 \Longleftrightarrow 5\ell(\ell - 8) = 0$$

Deux possibilités soit, $5\ell = 0 \Longleftrightarrow \ell = 0$, soit $\ell - 8 = 0 \Longleftrightarrow \ell = 8$ Or, comme $v_0 = 6$ et comme la suite (v_n) est croissante on a nécessairement :

$$v_n \geq 6 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

et par passage à la limite : $\ell \geq 6$, par conséquent :

$$\ell = 8 \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = 8$$

<u>Exercice</u> 2. 2009 (5 points)

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   (a) Calculer $u_2,\ u_3$ et u_4.

   (b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

   (c) Sur la figure ci-dessous, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \dfrac{1}{2}x + 3$.
   A partir de u_0, en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manieère placer les termes $u_2,\ u_3$ et u_4.
   Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

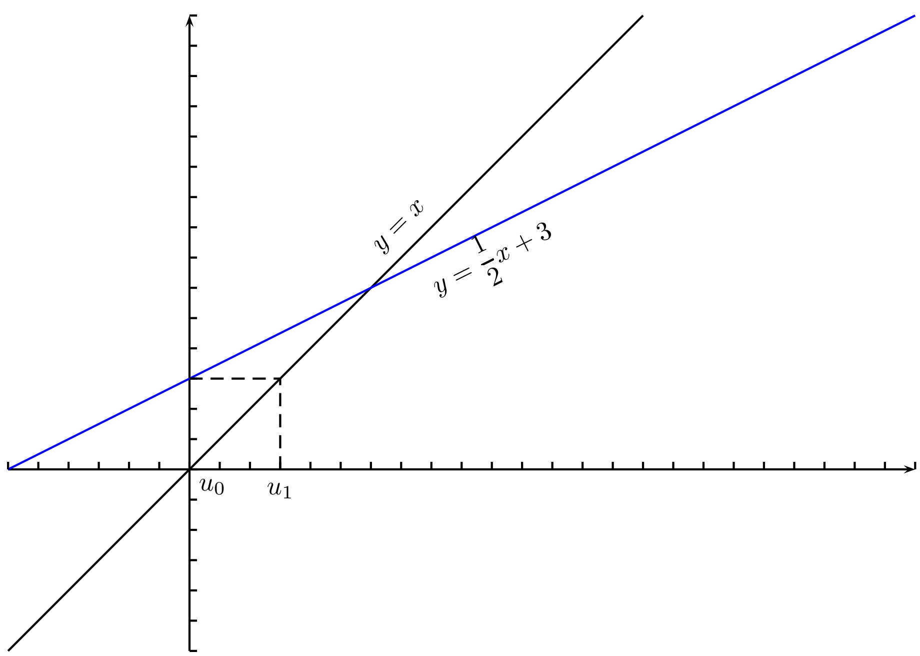
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit (w_n) la suite de premier terme w_0 et telle que, pour tout nombre entier naturel $n, w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n + 3$.
   On suppose que w_0 est strictement suprieur 6.
   Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.



Solutions :

1. (a) $u_2 = \frac{9}{2}$ et $u_3 = \frac{27}{4} - \frac{3}{2} = \frac{27}{4} - \frac{6}{4} = \frac{21}{4}$, enfin :

$$u_4 = \frac{63}{8} - \frac{9}{4} = \frac{63-18}{8} = \frac{45}{8}$$

(b) Notons $\mathscr{P}(n)$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

– *Initialisation* : pour $n = 0$ on a : $\frac{1}{2}u_0 + 3 = 3 = u_1$ ce qui prouve la $\mathscr{P}$ au rang 0.

– *Hérédité* : Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \iff \frac{1}{2}u_n = u_{n+1} - 3 \iff u_n = 2u_{n+1} - 6$$

On veut montrer que :

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$$

Or, on sait que :

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}(2u_{n+1} - 6) = \frac{3}{2}u_{n+1} - u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}u_{n+1} - 3$$

Par conséquent $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$, ce qui prouve que la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire et donc que :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(c) Le tracé est réalisé en dernière page. On conjecture que la suite (u_n) est croissante et converge vers 6

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 3 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 6) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -6$.

(b) Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -6$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Par conséquent on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = v_n + 6 = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

(c) Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 6$$

Solutions :

3. Etudions le sens de variation de la suite (w_n). En observant le graphique ci-dessous on conjecture que la suite (w_n) est décroissante. Montrons le par récurrence.
   Notons $\mathscr{P}(n)$: $6 < w_{n+1} < w_n$
   - *Initialisation* : $w_0 > 6$, dans ce cas $w_1 = \frac{1}{2}w_0 + 3$ et :
     $$w_1 - w_0 = -\frac{1}{2}w_0 + 3$$
     Or :
     $$\begin{aligned} & w_0 > 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & -\frac{1}{2}w_0 < -3 \\ \Longleftrightarrow \quad & -\frac{1}{2}w_0 + 3 < 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & w_1 - w_0 < 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & w_1 < w_0 \end{aligned}$$
     De plus, $w_1 > \frac{1}{2} \times 6 + 3 = 6$, donc la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.
   - *Hérédité* : Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$. D'après l'hypothèse de récurrence on a
     $$6 < w_{n+1} < w_n$$
     On veut monter que :
     $$w_{n+2} < w_{n+1}$$
     Or :
     $$w_{n+2} - w_{n+1} = \frac{1}{2}w_{n+1} + 3 - w_{n+1} = -\frac{1}{2}w_{n+1} + 3$$
     Or :
     $$\begin{aligned} & w_{n+1} > 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & -\frac{1}{2}w_{n+1} < -3 \\ \Longleftrightarrow \quad & -\frac{1}{2}w_{n+1} + 3 < 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & w_{n+2} - w_{n+1} < 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & w_{n+2} < w_{n+1} \end{aligned}$$
     De plus, $w_{n+2} > \frac{1}{2} \times 6 + 3 = 6$, donc la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$, elle est donc héréditaire, par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
     $$6 < w_{n+1} < w_n$$

   ce qui prouve que la suite (w_n) est décroissante et minorée.
   Par conséquent la suite (w_n) est convergente vers un réel ℓ qui vérifie (on passe à la limite dans l'expression $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$:
   $$\ell = \frac{1}{2}\ell + 3 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\ell = 3 \Longleftrightarrow \ell = 6$$
   Par conséquent
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n - w_n = 6 - 6 = 0$$

Solutions :

Montrons que la suite (u_n) est croissante. Comme pour w_n on obtient :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 3$$

Or $-\frac{1}{2}x + 3 > 0 \iff x < 6, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ Il faut donc montrer que $u_n < 6$ pour tout $n \in \mathbb{R}$. Pour cela notons $\mathscr{P}(n) : u_n < 6$

– *Initialisation* : La propriété $\mathscr{P}$ est trivialement vraie au rang 0 puisque $u_0 = 0$.
– *Hérédité* : Supposons que $u_n < 6$ et montrons que $u_{n+1} < 6$:

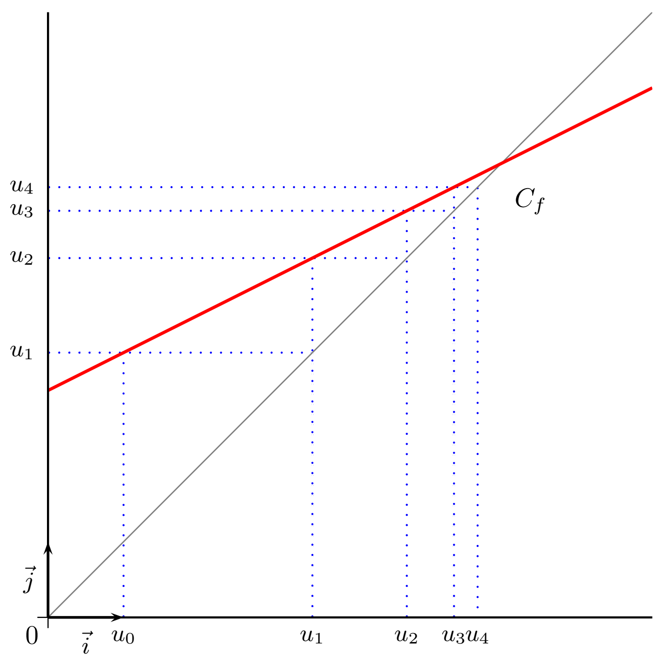
$$\begin{array}{rc} & u_n < 6 \\ \iff & \frac{1}{2}u_n < 3 \\ \iff & \frac{1}{2}u_n + 3 < 6 \\ \iff & u_{n+1} < 6 \end{array}$$

$\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$, $\mathscr{P}$ est donc héréditaire, par conséquent (u_n) est une suite croissante.

Au final on a :

1. (u_n) est $\nearrow$
2. (w_n) est $\searrow$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - w_n = 0$

ce qui montre que les suites (u_n) et (w_n) sont adjacentes.



Remarque : La dernière question de cette annale est une question monstre, il faut pour y répondre faire beaucoup de chose sans être guidé. De plus je trouve cet exercice extrémement mal posé, ce qui est très étonnant quand on sait que pour concevoir un examem aussi important que le BAC plusieurs inspecteurs et enseignants réfléchissent au sujet. En effet la question 2. n'est pas jusfitié car trouver la limite de la suite (u_n) est évident dès qu'on sait que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$. De plus la question 2.$(c)$ suggère de montrer que la suite (u_n) est convergente avant de déterminer sa limite (i.e de montrer que (u_n) est croissante et majorée) alors que déterminer sa limite montre qu'elle est convergente (et de toute façon on est obligé de déterminer sa limite). Enfin ces deux suites adjacentes ne présentent que peu d'intérêt puisqu'on sait très bien déterminer leur limite commune.