CORRECTION BACCALAUREAT

SESSION 2011

MATHEMATIQUES-SPECIALISTE et NON SPECIALISTE

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 Heures**. COEFFICIENT : **7** ou **9**.

Cette correction comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

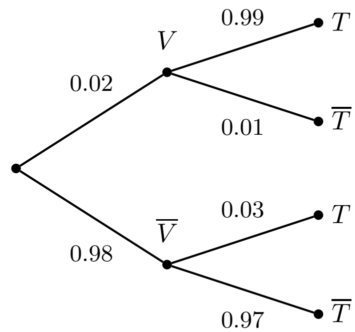
Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développé. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

CORRECTION DU BAC

Exercice 1. (4 points)

Partie A

1. (a) On a $P(V) = 0,02$, $P_V(T) = 0,99$ et enfin $P_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0,97$.



   (b) On a :

$$P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198$$

2. On a :

$$P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T) = 0,0198 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492$$

3. (a) Calculons $P_T(V)$:

$$P_T(V) = \frac{P(T \cap V)}{P(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} \simeq 0,4$$

   Ainsi si le test est positif il n'y a environ que 40% de chances que la personne soit contaminée.

   (b) Calculons $P_{\overline{T}}(\overline{V})$:

$$P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{V})}{P(\overline{T})} = \frac{0,98 \times 0,97}{0,02 \times 0,01 + 0,98 \times 0,97} = \frac{0,9506}{0,9508} = \frac{9506}{9508} \simeq 0,9998$$

Partie B

1. On répète successivement et indépendemment 10 épreuves de Bernoulli, par conséquent :

$$X \hookrightarrow B(10; 0,02)$$

2. Calculons $P(X \geq 2)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,98^{10} - 10 \times 0,02 \times 0,98^9 \simeq 0,0162$$

Remarque : Cette exercice permettait de gagner aisément 4 points et de prendre confiance pour la suite. De plus il ne fallait probablement pas travailler très longtemps pour en venir à bout tout en rédigeant très proprement.

Exercice 2. (4 points)

1.

$$z_E - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A) \Longleftrightarrow z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}(-i-1)+1 = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-i-1)+1 = -\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i)$$

2.

$$\begin{aligned} & \mid z+i \mid = \mid z-1 \mid \\ \Longleftrightarrow\ & \mid z-z_D \mid = \mid z-z_A \mid \\ \Longleftrightarrow\ & MD = MA \\ \Longleftrightarrow\ & M \text{ appartient à la médiatrice de [AD]} \end{aligned}$$

Remarque : Malheureusement la médiatrice du segment $[AD]$ est aussi la médiatrice du segment $[BC]$ compte tenu de la particularité de la figure. Autrement dit il y avait deux réponses exactes et donc une erreur dans l'énoncé...

3.

$$\begin{aligned} & \frac{z+i}{z+1} \text{ imaginaire pur} \\ \Longleftrightarrow\ & arg\left(\frac{z+i}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{z+i}{z+1} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & arg\left(\frac{z-z_D}{z-z_C}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \quad \text{ou} \quad z+i=0 \\ \Longleftrightarrow\ & (\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \quad \text{ou} \quad z=-i \\ \Longleftrightarrow\ & (CM)\perp(DM) \quad \text{ou} \quad M=D \\ \Longleftrightarrow\ & M \text{ appartient au cercle de diamètre } [CD] \text{ privé du point C} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} & arg(z-i) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \Longleftrightarrow\ & arg\,(z-z_B) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \Longleftrightarrow\ & (\vec{u};\overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \Longleftrightarrow\ & M \text{ appartient à la demi-droite }]BD) \text{ d'origine } B \text{ passant par } D \text{ privée de } B. \end{aligned}$$

Remarque : Sans l'erreur d'énoncé ce bac commencait fort bien pour avoir une très bonne note. Cet exercice est en effet plus dur à rédiger qu'à résoudre, mais il ne fallait pas rédiger... Notons tout de même qu'une mauvaise réponse n'enlevait aucun point, par conséquent l'élève n'ayant pas répondu à toutes les questions est étrange...

Exercice 3. (7 points)

Partie A

1. (a) $f_1(x) = xe^{-x}$.
   On a :
   $$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\lim_{x\to+\infty} xe^{x} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$$
   (b) $f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.
   f_1' est du signe de $1-x$ puisque l'exponentielle est strictement positive donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
f_1'		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

   (c) Dans le cas contraire $k = 1$ et dans ce cas on devrait observé la courbe d'une fonction strictement croissante sur $]-\infty; 1]$, ce qui n'est clairement pas le cas. Ainsi $k \geq 2$.
2. (a) On a $f_n(0) = 0$ donc $O \in \mathscr{C}_n$.
   De plus $f_n(1) = e^{-1}$ donc $P(1; e^{-1}) \in \mathscr{C}_n$.
   (b) $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$
3. $f_3'(x) = x^2e^{-x}(3-x)$. Or, $x^2e^{-x} \geq 0$, d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de $3-x$			$+$		0	$-$	
Signe de f_3'		$+$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f_3		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$27e^{-3}$	$\searrow$	

   f_3 est donc strictement croissante sur $]-\infty; 3]$ et strictement décroissante sur $[3; +\infty[$, f_3 admet donc un maximum pour $x = 3$ qui est $27e^{-3}$
4. (a) T_k a pour équation :
   $$y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1) = (k-1)e^{-1}(x-1) + e^{-1}$$
   De plus pour $y = 0$ on trouve :
   $$(k-1)e^{-1}(x-1) + e^{-1} = 0 \iff (k-1)(x-1) + 1 = 0 \iff x(k-1) - k + 1 + 1 = 0 \iff x = \frac{k-2}{k-1}$$
   Ainsi T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}; 0\right)$.

(b) D'après l'énoncé on sait que $\dfrac{k-2}{k-1} = \dfrac{4}{5} \iff 4k - 4 = 5k - 10 \iff k = 6$

Partie B

1. En utilisant l'intégration par parties on a :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

2. (a) I_n représente l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_n$ entre l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ (effectivement on sait que $f_n(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$, du moins c'est une évidence). Une rapide observation du graphique permet de conjecturer que la suite (I_n) est décroissante, voire strictement décroissante.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} & 0 < x < 1 \\ \iff & 0 < x^{n+1} < x^n \\ \iff & 0 < x^{n+1}e^{-x} < x^n e^{-x} \\ \iff & 0 < \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx < \int_0^1 x^n e^{-x}dx \\ \iff & 0 < I_{n+1} < I_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (I_n) est strictement décroissante.

(c) $x \in [0;1] \iff 0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq x^n \leq 1$.
De plus si $x \in [0;1]$ alors $e^0 \leq e^x \leq e^1 \iff 1 \leq e^x \leq e \iff \dfrac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1$.
Au final on a donc $0 \leq x^n e^{-x} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}dx \leq \int_0^1 1dx \Longrightarrow 0 \leq I_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
On vient de montrer que la suite (I_n) est minorée par 0 (et au passage majorée par 1), sachant d'après la question précédente que (I_n) est suite décroissante, on en déduit qu'elle est convergente.

(d) **Première méthode** :
A l'aide d'une intégration par parties, exprimons I_{n+1} en fontion de I_n :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n e^{-x}dx = -e^{-1} + (n+1)I_n \iff I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

Au final on obtient :

$$\frac{I_{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{e(n+1)} + I_n$$

En notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1}$ et en passant à la limite membre à membre ($\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$) on a :

$$0 = \ell$$

Deuxième méthode :
On sait que :

$$\frac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1 \iff \frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n \iff \frac{1}{e}\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e(n+1)}$. Ainsi d'après le théorème des gendarmes on peut conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

Exercice 4. (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A-Restitution organisée de connaissances

1. Supposons que a divise bc et que a et b ont premiers entre eux, dans ce cas d'après le théorème de Bezout, il existe un couple $(u;v)$ d'entiers relatifs tels que :

$$au + bv = 1$$

Comme a divise bc, il existe un entier k tel que

$$ak = bc \Longrightarrow avk = bvc \Longrightarrow avk = (1 - au)c \Longrightarrow a(vk + cu) = c \Longrightarrow a \text{ divise } c$$

2. On suppose que p et q sont premiers entre eux, puis que p divise a et q divise a. On souhaite montrer que pq divise a.
p divise a alors il existe k entier tel que $a = pk$.
q divise a alors il existe k' entier tel que $a = qk'$. Et donc $pk = qk'$. Ainsi p divise qk' mais p et q sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss p divise k' i.e il existe un entier k'' tel que $pk'' = k'$. Au final :

$$a = qk' = qpk'' \Longrightarrow a \equiv 0[pq]$$

Partie B

1. (a) 17 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bezout il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que :

$$17u + 5v = 1$$

(b)

$$n_0 - 9 = 3\times 17u + 9\times 5v - 9 = 3\times 17u + 9(5v-1) = 3\times 17u - 9\times 17u = 17(3u - 9u) = -17\times 6u \Longrightarrow n_0 \equiv 9[17]$$

De même

$$n_0 - 3 = 3 \times 17u + 9 \times 5v - 3 = 3(17u - 1) + 9 \times 5v = -3 \times 5v + 9 \times 5v = 6 \times 5v \Longrightarrow n_0 \equiv 3[5]$$

Donc $n_0 \in \mathscr{S}$.

(c) Donner un exemple d'entier n_0 dans $\mathscr{S}$ revient à trouver un exemple de couples d'entiers (u, v) vérifiant $17u + 5v = 1$.
On a $17 = 5 \times 3 + 2 \Longleftrightarrow 17 - 5 \times 3 = 2$ et $5 = 2 \times 2 + 1$.
Par conséquent $1 = 5 - 2 \times 2 \Longleftrightarrow 1 = 5 - 2(17 - 5 \times 3) \Longleftrightarrow 1 = 5 \times 7 - 2 \times 17$.
Ainsi $n_0 = 3 \times 17 \times (-2) + 9 \times 5 \times 7 = -102 + 315 = 213 \in \mathscr{S}$

2. (a) On a $n \equiv 9[17]$ et $n_0 \equiv 9[17]$ donc $n - n_0 \equiv 0[17]$.
De même $n - n_0 \equiv 0[5]$, donc d'après le 2. de la partie A on a

$$n - n_0 \equiv 0[85]$$

(b) <u>Note</u> : $43 \in \mathscr{S}$, en effet $43 - 9 = 2 \times 17$ et $43 - 3 = 8 \times 5$.
Si $n \in \mathscr{S}$ alors $n - n_0 \equiv 0[85]$ donc pour $n_0 = 43$ il existe un entier k tel que :

$$n = 85k + 43$$

Réciproquement si $n = 43 + 85k$ alors $n - 9 = 34 + 85k = 17(2 + 5k)$ donc $n \equiv 9[17]$.
De même $n - 3 = 40 + 85k = 5(8 + 17k)$ donc $n \equiv 3[5]$ et donc $n \in \mathscr{S}$.
Ainsi

$$n \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 43 + 85k$$

3. Si on note n le nombre de jetons de Zoe alors $n \equiv 9[17]$ et $n \equiv 3[5]$ donc $n \in \mathscr{S}$.
De plus on sait que $300 \leq n \leq 400$.
D'après la question précédente on obtient pour $k = 0$, $n = 43$. Pour $k = 3$, $n = 298$. Pour $k = 4$, $n = 383$ et pour $k = 5$, $n > 400$. La seule possibilité est donc $n = 383$.
Zoe a donc 383 jetons.

Exercice 4. (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A-Restitution organisée de connaissances

1. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = \|\vec{n}\| \times \|\overrightarrow{M_0H}\| \cos\left(\vec{n};\overrightarrow{M_0H}\right)$. Or, $\left|\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{M_0H}\right)\right| = 1$ (en effet $\vec{n}$ et $\overrightarrow{M_0H}$ sont colinéaires). D'où, comme $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$:

$$|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

2. $\overrightarrow{M_0H}(x_H-x_0;y_H-y_0;z_H-z_0)$ donc :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = a(x_H-x_0)+b(y_H-y_0)+c(z_H-z_0) = ax_H+by_H+cz_H-ax_0-by_0-cz_0$$

On sait que $H\in\mathscr{P}$ donc $ax_H+by_H+cz_H+d=0 \iff ax_H+by_H+cz_H=-d$, d'où :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = -ax_0-by_0-cz_0-d$$

3. On a donc $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2} \iff M_0H = \dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
Ainsi :

$$d(M_0,\mathscr{P}) = \frac{|-ax_0-by_0-cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Partie B

1. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-7;1;-5)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;2;1)$ ont des coordonnées non proportionnelles, par conséquent les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés, ce qui prouve qu'ils définissent un plan. Vérifions alors que les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation du plan $\mathscr{P} : x+2y-z-1=0$.

$$\left.\begin{array}{r} 4+2-5-1=1-1=0 \Longrightarrow A\in\mathscr{P} \\ -3+4-0-1=0 \Longrightarrow B\in\mathscr{P} \\ 1+6-6-1=0 \Longrightarrow C\in\mathscr{P} \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow (ABC)=\mathscr{P}$$

(b)

$$d(F;\mathscr{P}) = \frac{|-7+0-4-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$$

2. (a) $\Delta\perp\mathscr{P}$ donc $\vec{n}$ dirige Δ, ainsi une équation paramétrique de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{l} x=t-7 \\ y=2t \\ z=-t+4 \end{array}\right. \qquad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

(b) Comme $\Delta\perp\mathscr{P} \Longrightarrow H=\Delta\cap\mathscr{P}$, les coordonnées de H vérifient simultanément les équations de Δ et $\mathscr{P}$.

$$t-7+4t+t-4-1=0 \iff 6t=12 \iff t=2 \Longrightarrow H\,(2-7;4;-2+4) \iff H(-5:4;2)$$

(c) On a

$$d(F;\mathscr{P}) = FH = \sqrt{(-5+7)^2+(4-0)^2+(2-4)^2} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = \sqrt{4\times 6} = 2\sqrt{6}$$

3. (a)

$$BF = \sqrt{(-7+3)^2+(0-2)^2+(4-0)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6 \iff B\in\mathscr{S}$$

(b) On a $d(F;\mathscr{P})<6$ donc la sphère $\mathscr{S}$ coupe $\mathscr{P}$ et l'intersection est un cercle de centre H et de rayon HB en vertu de la question précédente i.e de rayon

$$r = HB = \sqrt{(-3+5)^2+(2-4)^2+(0-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$