∽ Baccalauréat S Suite ∾

1 Métropole Juin 2010

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.
Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :
(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant a $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;
(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.
Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On conside re une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera a fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

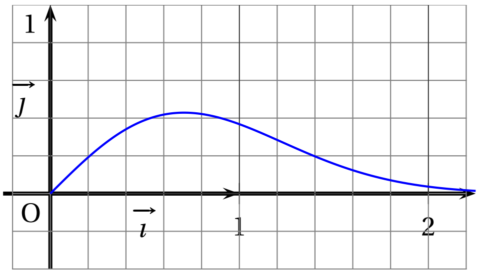
1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

2 Pondichéry Juin 2009

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repere orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$).

   b. Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.
   Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considere la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas a expliciter u_n.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1

   $$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?

   c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n,

   $$F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplete, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues a l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

   Interpréter ces résultats.

3 La réunion juin 2007

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.
On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Étudier la monotonie de la suite u.
2. **a.** Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$.
   Étudier le sens de variations de la fonction h.
   En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.
3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

4 Métropole Juin 2007

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée sur le document annexe que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
   Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0\ ;\ 4]$, alors $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

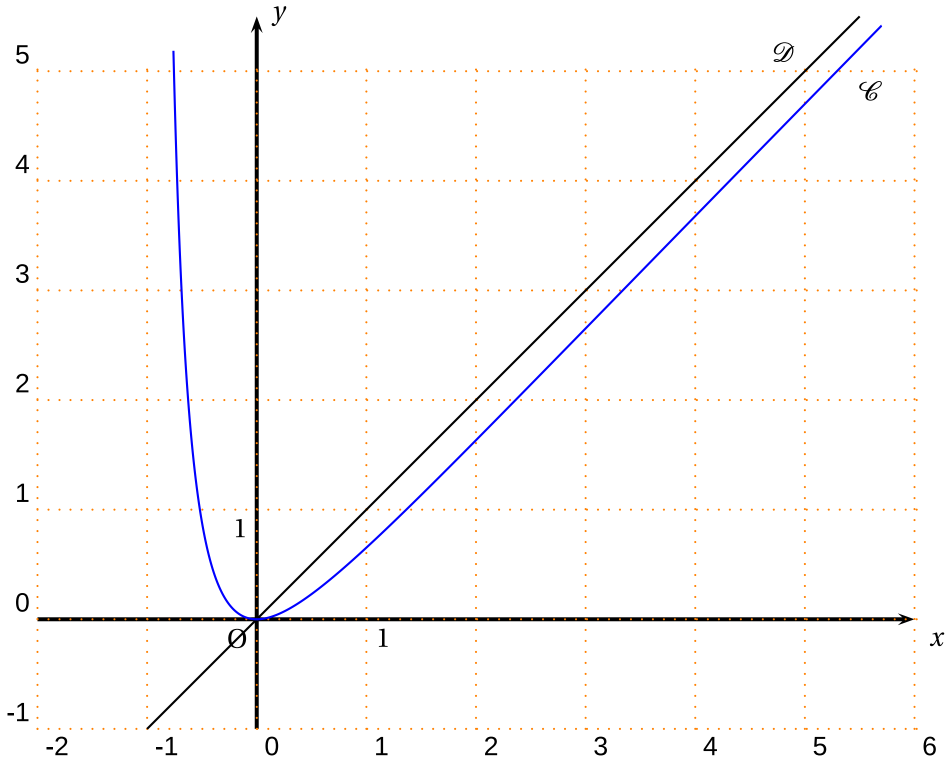
   a. Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

   b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.

   c. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

   d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.



5 Asie Juin 2008

On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ tels que :
– le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
– chacun des suivants, $S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ contient 2 billes jaunes et 2 vertes.
Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivant :
– on tire au hasard une bille dans S_1 ;
– on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;
– on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;
– ect.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'événement : « la bille tirée dans S_n est verte »et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

  a. D'après l'énoncé, donner les valeurs $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$, $p_{\overline{E_1}}(E_2)$.
  En déduire la valeur de $p(E_2)$.

  b. A l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

2. Etude d'une suite
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} \qquad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

  a. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

  b. Démontrer que (u_n) est croissante.

  c. Justifier que la suite (u_n) est convergente puis préciser sa limite.

3. A l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.

4. Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0,49999 \leq p(E_n) \leq 0,5$?