Correction du devoir Surveillé 4

<u>Exercice</u> 1. On considère la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2x - 8$

1. Comme il n'y a ni racine carrée, ni quotient dans l'expression de $f(x)$ $D_f = \mathbb{R}$
2. A l'aide de la représentation graphique donnée en page 2, on trouve :
   (a) $f(1) = -5$, $f(-1) = -9$ et $f(-3) = -5$
   (b) Les antécédents de -8 sont -2 et 0
   (c) L'équation $f(x) = 0$ admet -4 et 2 comme solution.
   (d) Le tableau de signe de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi $f(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[$

   (e) Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-90	$\rightarrow$

3. Dans cette deuxième partie, on montre les résultats précédents par le calcul :
   (a)
$$f(1) = 1^2 + 2 \times 1 - 8 = -5$$
$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 8 = -9$$
   et
$$f(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) - 8 = 9 - 6 - 8 = -5$$
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(x+1)^2 - 9 = x^2 + 2x + 1 - 9 = x^2 + 2x - 8 = f(x)$$
   (c) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} & (x+1)^2 \geq 0 \\ \iff & (x+1)^2 - 9 \geq -9 \\ \iff & f(x) \geq -9 \end{aligned}$$
   De plus $f(-1) = -9$, par conséquent -9 est le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$
   (d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(x+4)(x-2) = x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8 = f(x)$$

(e)

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \iff & (x+1)^2 - 9 = 0 \\ \iff & (x+1)^2 = 9 \\ \iff & x+1 = 3 \text{ ou } x+1 = -3 \\ \iff & x = 2 \text{ ou } x = -4 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc -4 et 2

<u>Exercice</u> 2. On considère la fonction f définie sur $[-5; 10]$ par le tableau de variation suivant :

x	-5		3		5		10
			3				2
$g(x)$		↗		↘		↗	
	2				-1		

1. $-4 < 1$, or la fonction g est strictement croissante sur $[-5; 3]$, les images et les antécédents sont donc rangés dans le même ordre donc $g(-4) < g(1)$
2. $4 < 5$, or la fonction g est strictement décroissante sur $[3; 5]$, donc les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse, par conséquent $g(4) > g(5)$ *(Justifier)*
3. L'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions :
   – la première dans $[3; 5]$, puisque la fonction g est décroissante sur cet intervalle et que $g(3) > 0$ et $g(5) < 0$
   – la seconde dans $[5; 10]$, puisque la fonction g est décroissante sur cet intervalle et que $g(5) < 0$ et $g(10) > 0$
4. Le maximum de la fonction g sur $[-5; 5]$ est 3.
5. $g(0)$ est compris entre 2 et 3, tandis que $g(7)$ est compris entre -1 et 2, il est donc clair que :

$$g(0) > g(7)$$

<u>Exercice</u> 3. (7 points)

Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A. On donne $BC = 9$ cm.
Soit I le milieu de $[BC]$, le point M appartient au segment $[BI]$.
Le quadrilatère $MNPQ$ est un rectangle où N est un point du segment $[AB]$, P un point du segment $[AC]$ et Q un point du segment $[BC]$.

1. (a) Comme le triangle ABC est rectangle et isocèle les angles à la base mesurent 45° par conséquent

$$\widehat{ABC} = 45°$$

Le triangle BMN possède un angle droit et un angle de 45° donc du coup deux angles de 45° puisque la somme des angles dans un triangle est de 180°.
BMN est un triangle rectangle isocèle en en M donc $BM = MN$

   (b) En raisonnant de la même manière pour le triangle PQC que pour le triangle BMN on trouve que le triangle PQC est rectangle isocèle et donc que $PQ = QC$.
Or le quadrilatère $MNPQ$ est un rectangle donc $MN = PQ$, et comme $MN = BN$ on en déduit que $BM = QC$.

2. On pose $BM = x$
   (a) M est un point du segment $[BI]$ qui mesure $4,5$ cm, par conséquent le réel x appartient à l'intervalle $[0; 4,5]$?

(b) Comme $MN = BM$ alors $MN = x$, on a aussi $QC = x$. Or, $BC = 9$ et $MQ = BC - BM - QC = 9 - 2x$.

(c) L'aire du rectangle $MNPQ$, notée $f(x)$, s'écrit :

$$f(x) = MN \times MQ = x(9-2x) = 9x - 2x^2$$

3. $f\left(\dfrac{9}{4}\right) = 9 \times \dfrac{9}{4} - 2 \times \left(\dfrac{9}{4}\right)^2 = \dfrac{81}{4} - 2 \times \dfrac{81}{16} = \dfrac{81}{4} - \dfrac{81}{8} = \dfrac{162-81}{8} = \dfrac{81}{8}$

4. (a) cf. ci dessous.

(b) Par lecture graphique, le tableau de variation de f semble être :

x	0	$2,25$	$4,5$
$f(x)$	0 ↗	$\simeq 10$	↘ 0

(c)
$$\frac{81}{8} - 2\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{8} - 2\left(x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{81}{16}\right) = \frac{81}{8} - 2x^2 + 9x - \frac{81}{8} = f(x)$$

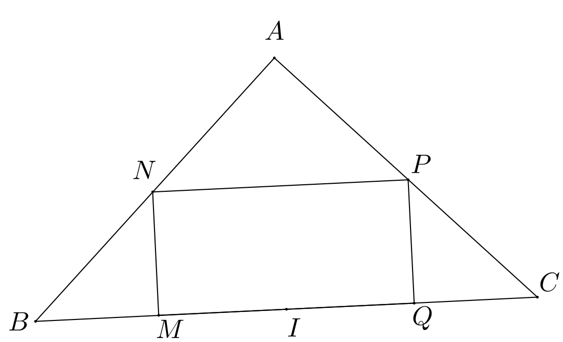
On sait qu'un carré est toujours positif ou nul, par conséquent :

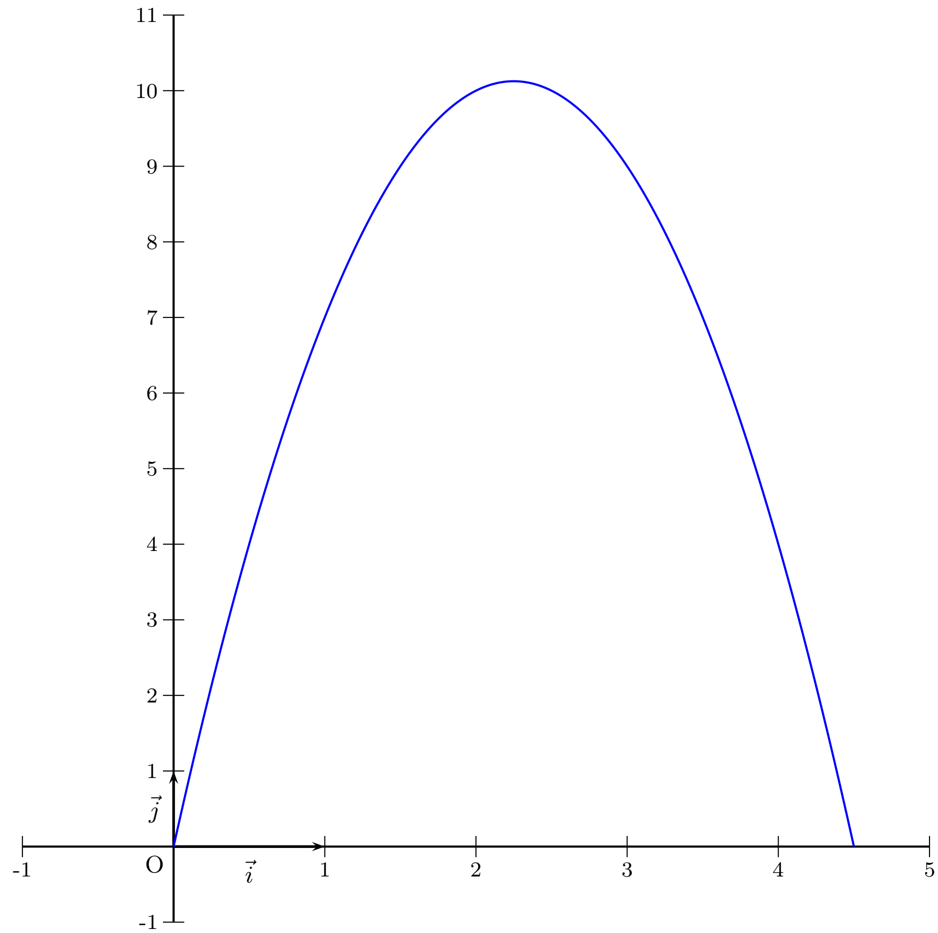
$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{9}{4}\right)^2 \geq 0 \\ \iff\quad & -2\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 \leq 0 \\ \iff\quad & \frac{81}{8} - 2\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 \leq \frac{81}{8} \\ \iff\quad & f(x) \leq \frac{81}{8} \end{aligned}$$

De plus, on sait que

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{81}{8}$$

Ainsi le maximum de la fonction f est $\dfrac{81}{8}$ atteint pour $x = \dfrac{9}{4}$ i.e l'aire du rectangle $MNPQ$ est maximale pour $x = \dfrac{9}{4}$ et cette aire vaut $\dfrac{81}{8}$




11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
$\vec{j}$
-1
O
$\vec{i}$
1
2
3
4
5
-1