Correction du devoir Surveillé 1

Exercice 1. *Factoriser-Développer* (6 points)

1. (a) $(2x-1)(x+3)=2x^2+6x-x-3$
   (b) $(2y-1)^2=4y^2-4y+1$
2. (a) $x^2-6x=x(x-6)$
   (b) $(x+1)(x+2)+(x+2)(2x-1)=(x+2)(x+1+2x-1)=3x(x+2)$
   (c) $25-(x+1)^2=(5-(x+1))(5+x+1)=(4-x)(6+x)$
   (d) $x^2-4x+4=(x-2)^2$

Exercice 2. *Fractions* (4 points)

1. $A=\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{5}=\dfrac{\frac{8}{6}+\frac{3}{6}}{5}=\dfrac{\frac{11}{6}}{5}=\dfrac{11}{30}$
2. On note $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (a) Dans un premier temps on a :
   $$(1+\sqrt{5})^2=1+2\sqrt{5}+5=6+2\sqrt{5}$$
   puis :
   $$\Phi^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
   (b) $\Phi+1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\dfrac{1+\sqrt{5}+2}{2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   (c) On en déduit donc que $\Phi^2=\Phi+1$

Exercice 3. *Un peu de calcul !* (3 points)

1. On a
$$\frac{3^{-3}\times\left(30^3\right)^4}{3^9\times(-5)^{12}\times 4^6}=\frac{30^{12}}{3^3\times 3^9\times 5^{12}\times(2^2)^6}=\frac{6^{12}\times 5^{12}}{3^{12}\times 5^{12}\times 2^{12}}=\frac{3^{12}\times 2^{12}}{3^{12}\times 2^{12}}=1$$
2.
$$A=20\sqrt{50}-8\sqrt{162}+4\sqrt{2}+\sqrt{36}=20\sqrt{25\times 2}-8\sqrt{81\times 2}+4\sqrt{2}+6=100\sqrt{2}-72\sqrt{2}+4\sqrt{2}+6=32\sqrt{2}+6$$

Exercice 4. *Utiliser une égalité* (4 points)

1. On a :
$$(a+b-c)(a+b+c)=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc-ac-bc-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2=(a+b)^2-c^2$$
2. D'après l'identité précédente pour $a=\sqrt{2}, =\sqrt{3}$ et $c=\sqrt{5}$ on a :
$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-\sqrt{5}^2=2+2\sqrt{6}+3-5=2\sqrt{6}$$

Exercice 5. *Encore du calcul !* (3 points)

1. On considère deux nombres x et y. On sait que leur somme vaut 314, on a donc $x+y=314$.
   On a :
$$(x+9)(y+9)=xy+9x+9y+81=xy+9(x+y)+81=xy+9\times 314+81=xy+2826+81=xy+2907$$

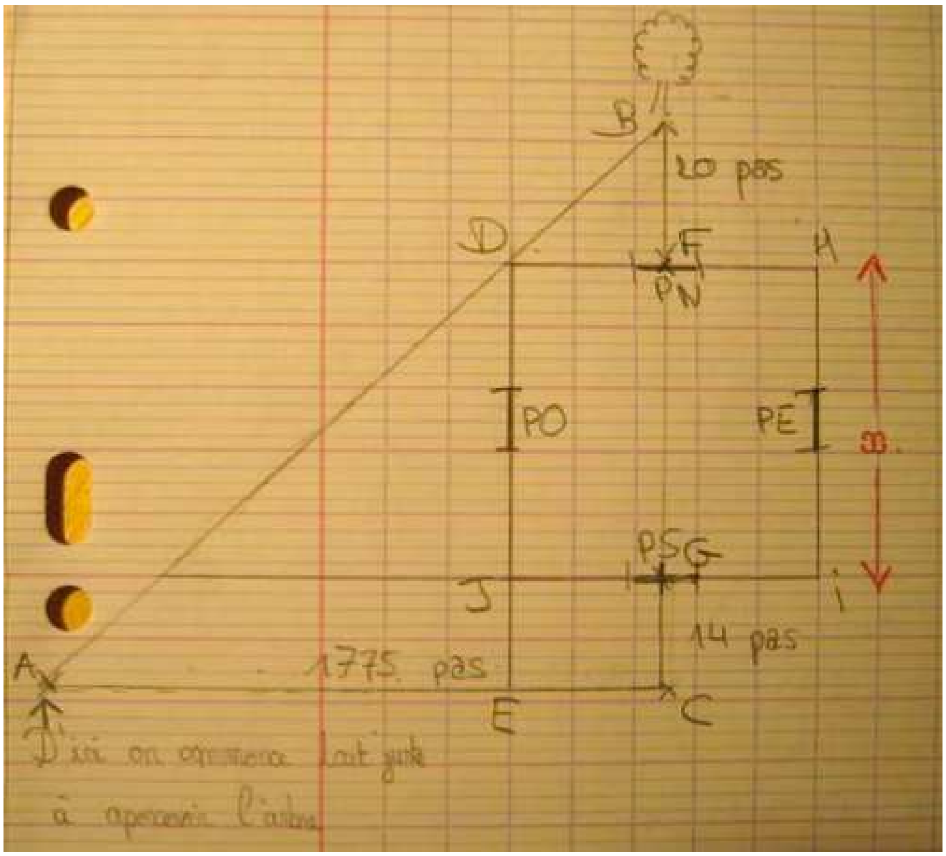
2. Désignons par x et y ces deux nombres, on a donc $x + y = 314$ et on cherche la valeur de

$$(x + 9)(y + 9) - xy$$

D'après la question précédente leur produit augmente donc de 2907.

Exercice 6. *Un vieux problème chinois* **(Bonus)**

Une ville carré de dimensions inconnues comprend une porte au milieu de chaque côté. A l'extérieur de la ville, vingt mètre après la sortie nord, se trouve un arbre. Si tu quittes la ville par la porte sud, marche quatorze mètres vers le sud puis 1775 vers l'ouest et tu commenceras tout juste à apercevoir l'arbre.
On cherche les dimensions de la ville.
Voici un schéma de la situation :



D'après le théorème de Thales on a :

$$\frac{BN}{BC} = \frac{DF}{AC} \iff \frac{20}{34 + x} = \frac{x/2}{1775} \iff 35500 = \frac{x}{2}(34 + x) \iff 35500 = 17x + \frac{x^2}{2} \iff 71000 = 34x + x^2$$

On résout alors cette équation :

$$x^2 + 34x = 71000 \iff (x + 17)^2 - 289 = 71000 \iff (x + 17)^2 = 71289 \iff x + 17 = \sqrt{71289} \quad \text{ou } x + 17 = -\sqrt{71289}$$

La solution négative n'a pas de sens car on cherche les dimensions d'une ville, ce qui donne donc :

$$x = \sqrt{71289} - 17 = 250$$

Par conséquent la ville est un carré de 250 mètres de côtés.[1]

1. Ce problème est issu des Neuf Chapitres sur l'art du calcul, ouvrage choinois datant d'il y a a peu près 2000 ans.