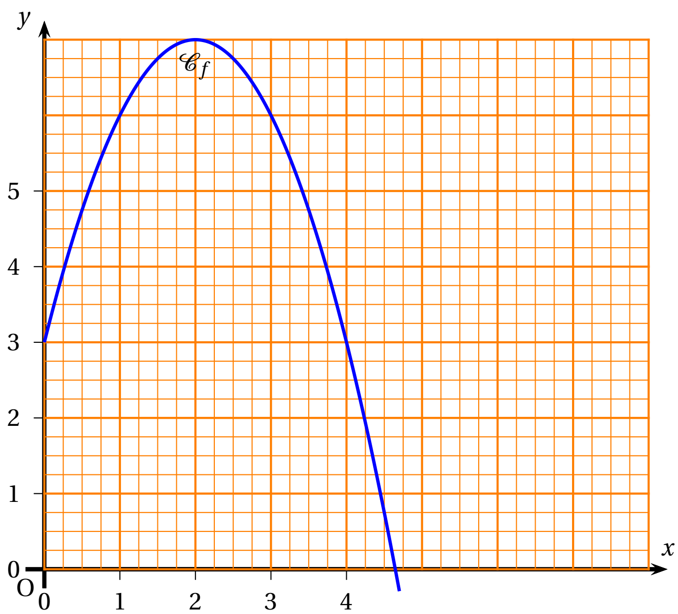
Exercice 1 : Inspiré d'Antilles-Guyanne juin 2011 Arts Appliqués

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = -x^2 + 4x + 3.$$

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

1. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
   On demande un minimum de justification, et non une réponse brute !
2. Dresser le tableau des variations de f.
   On attend ici des calculs*, mais pensez à vérifier la cohérence avec le graphique donné en annexe.*
3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Hachurer sur le graphique donné en annexe le domaine dont l'aire vient d'être calculée.



Exercice 2 : Métropole juin 2011 Arts Appliqués

Partie 1

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée en annexe (à rendre avec la copie) est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'unité graphique 5 cm.

On suppose que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ et on désigne par f' sa fonction dérivée.

Les données sont les suivantes :

(1) : La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points A, B et D d'abscisses respectives 1, 2 et 3. Les points A, A$'$, B$'$ et D$'$ ont des coordonnées entières.

(2) : La droite (BE), parallèle à l'axe des abscisses, est tangente en B à la courbe $(\mathscr{C})$.

(3) : La droite (AB$'$) est tangente en A à la courbe $(\mathscr{C})$.

On répondra aux questions ci-dessous par une lecture graphique. De ce fait, certains résultats seront arrondis au dixième.

1. Déterminer $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$.
2. **a.** Déterminer une équation de la droite (AB$'$).
   b. Déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$.
3. Dresser le tableau des variations de la fonction f et préciser le signe de sa dérivée f'.
4. Déterminer l'aire du triangle AA$'$B$'$ en unités d'aires.

Partie 2

1. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Vérifier que la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;3]$ par $f(x) = x - 2\ln x$ (ln désigne la fonction logarithme népérien) satisfait au données (2) et (3) de la partie 1.

   On suppose désormais que la fonction f représentée en annexe est la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;3]$ par : $f(x) = x - 2\ln x$.

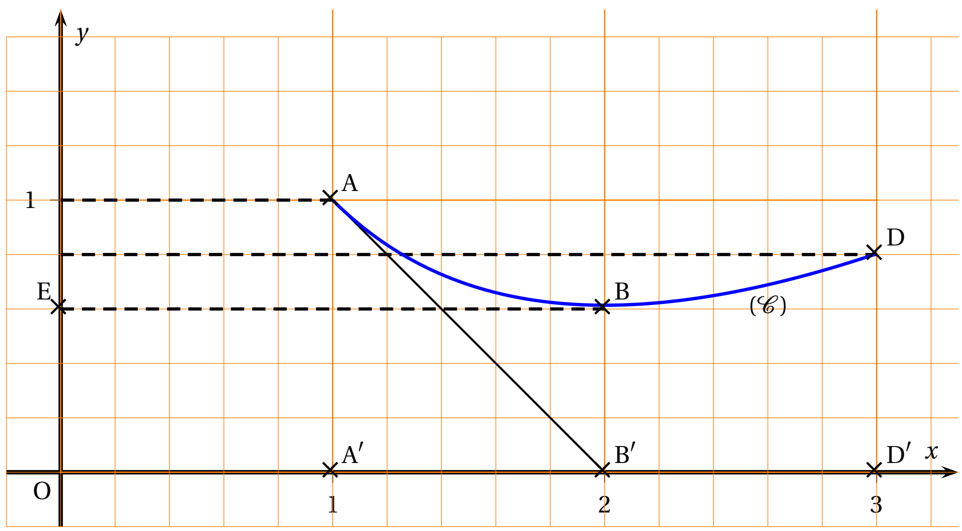
2. Soit F la fonction définie sur $[1\,;3]$ par : $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x - 2x\ln x$. Vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[1\,;3]$.

3. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de I et en donner une interprétation graphique.

4. Soit $(\mathscr{P})$ la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, la droite (AB') et la droite (DD').

   a. Hachurer $(\mathscr{P})$ et calculer son aire en unités d'aire.

   b. Le domaine $(\mathscr{P})$ représente la maquette à l'échelle $\dfrac{1}{3}$ du logo d'une société. Calculer l'aire en cm^2 de ce logo, arrondie à l'unité.



Exercice 3 : Métropole septembre 2011 Arts Appliqués

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$$

La courbe représentative de cette fonction est une partie P de la parabole représentée en annexe dans un repère orthogonal du plan. Unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $[0, 3]$.

2. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[3\,;6]$ par

$$h(x) = 3\ln x - 3\ln 3 + 1$$

et Γ sa courbe représentative dans le même repère que celui de la partie A.

1. **a.** On désigne par h' la dérivée de la fonction h. Vérifier que :
   Pour tout réel x de l'intervalle $[3\,;6]$, $h'(x) = \dfrac{3}{x}$.
   b. Quel est le sens de variation de h sur l'intervalle $[3, 6]$?
   c. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe Γ au point d'abscisse 3.
   On admettra que T est également tangente à la courbe P au même point.
2. Compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis au centième.

x	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$h(x)$							

Tracer la courbe Γ et la droite T dans le repère joint en annexe.

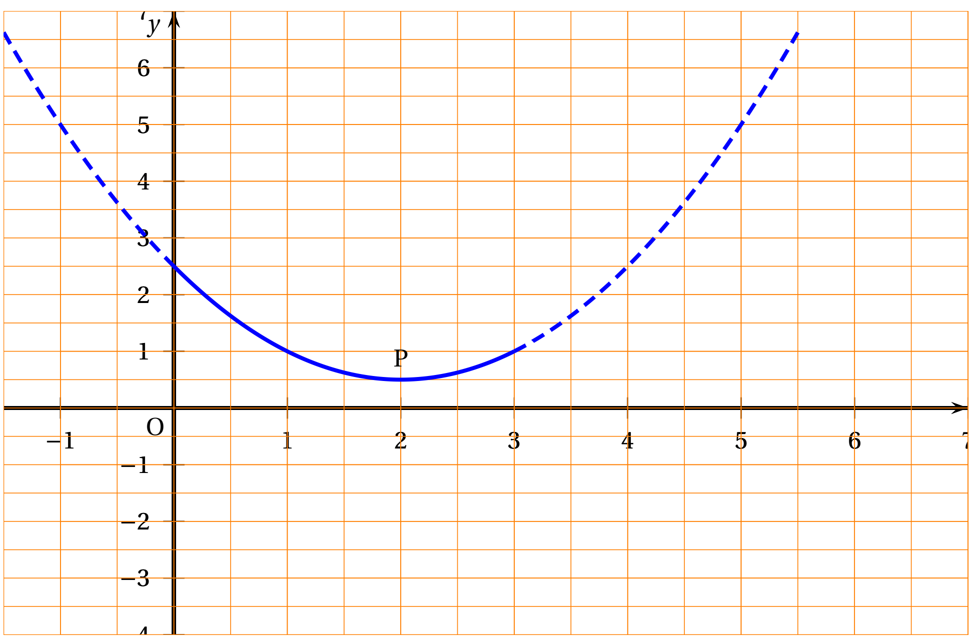
3. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;6]$ par

$$\mathrm{H}(x) = 3x\ln x - (3\ln 3 + 2)x.$$

   a. Vérifier que H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[3\,;6]$.
   b. On appelle J l'aire (en unités d'aires) de la partie du plan limitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $x = 6$. Déterminer la valeur arrondie de J au centième.

Partie C

1. On appelle C la réunion des courbes P et Γ.
   Construire sur le graphique la courbe C′ symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.
2. On veut connaître l'aire d'un logo dont le contour est formé par C, C′ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 6$. Justifier que l'aire de ce logo est égale, en cm^2, à $4(\mathrm{I}+\mathrm{J})$. En donner la valeur arrondie à l'unité.



Exercice 4 : Métropole Juin 2011 Génie Mécanique

Objectif : *Le but de ce problème est de comparer, sur un exemple, deux méthodes de calcul de volumes.*

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;10]$ par

$$f(x) = -x\ln x + 2x.$$

1. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel $x \in [1\,;\,10]$ par : $f'(x) = -\ln x + 1$.

2. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,10]$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,10]$.

3. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unités : 1 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).

Représenter graphiquement $\mathscr{C}$ dans ce repère.

4. On considère l'équation (E) : $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[1\,;\,10]$.

a. Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E).

b. Pour chacune des solutions trouvées, donner une valeur approchée à 10^{-2} près, en explicitant votre méthode.

5. On considère la fonction F, définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,10]$, par

$$\mathrm{F}(x) = x^2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\ln x\right).$$

a. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,10]$.

b. Sur la représentation graphique réalisée précédemment, hachurer la portion S du plan comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 7$.

c. À l'aide de la représentation graphique, évaluer (en unités d'aire) l'aire de la portion S.

Justifier la méthode utilisée.

d. Calculer la valeur exacte de cette aire en unités d'aire.

6. On veut déterminer le volume V_s du solide engendré par la rotation de la partie hachurée autour de l'axe des abscisses.

a. Méthode par calcul formel :

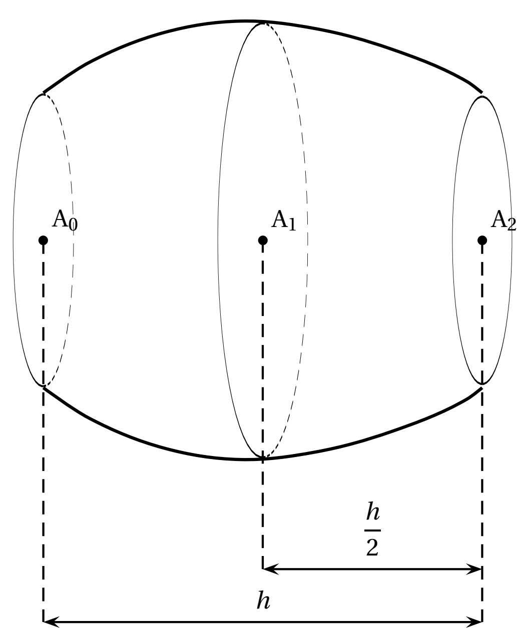
À l'aide d'un logiciel de calcul formel on obtient :

$$\mathrm{V}_s = \pi\left(\frac{343(\ln 7)^2}{3} - \frac{4\,802\ln 7}{9} + \frac{1\,900}{3}\right) \text{ unités de volume.}$$

En déduire une valeur approchée de V_s à 10^{-2} près.

b. Méthode des trois niveaux :

La méthode, dite des trois niveaux, permet d'estimer le volume d'un solide.



Par cette méthode, le volume estimé d'un solide de révolution de hauteur h est égale à
$V_e = \frac{1}{6}h(A_0 + 4A_1 + A_2)$ où A_0 est l'aire de la section gauche, A_1 l'aire de la section intermédiaire et A_2 l'aire de la section droite.
Compléter, par des valeurs approchées au centième, le tableau des surfaces ci-dessous

Tableau des surfaces

Surface	Section gauche	Section intermédiaire	Section droite
Rayons		$f(4) = -4\ln(4) + 8 \approx 2,45$	
Aires	12,57		

En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de V_e.

c. On considère que la méthode des trois niveaux est acceptable si le rapport $\frac{V_e}{V_s}$ est compris entre 0,95 et 1,05. Peut-on affirmer que cette méthode des trois niveaux est acceptable pour cet exemple ?

<u>Exercice 5</u> : Réunion juin 2011 Génie Electronique

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ par

$$f(x) = \ln x + ax + b,$$

où a et b désignent deux nombres réels, et on note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
On sait que le tableau de variations de f sur $]0\,;\,10]$ est le suivant :

x	0		2		10
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-2+\ln 2$	$\searrow$	$-6+\ln 10$

Partie A

1. Déduire du tableau de variations le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
2. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,10]$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   À l'aide de données numériques du tableau de variations, calculer a et b.

Partie B

On admet que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,10]$,

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x - 1.$$

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,10]$ par

$$g(x) = (\ln x)^2 - x - 2\ln x$$

dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est fournie ci-dessous.

1. **a.** Déterminer la limite de g en 0.

   b. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

2. **a.** Montrer que pour tout x de $]0\,;\,10]$, $g'(x) = \dfrac{2f(x)}{x}$.

   b. Déterminer les variations de la fonction g sur $]0\,;\,10]$.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

4. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,10]$.

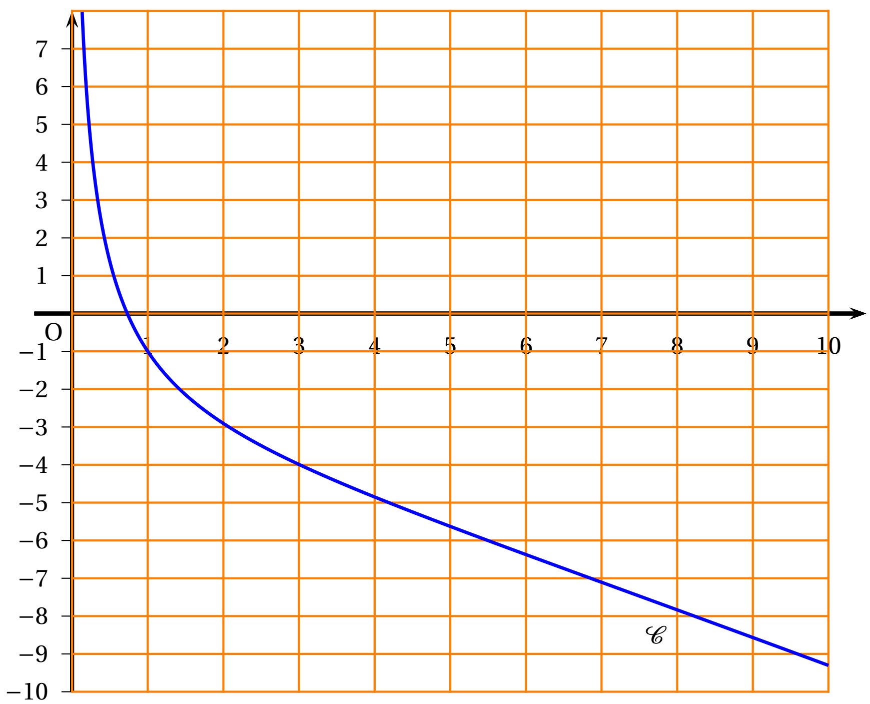
   b. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α d'amplitude $0{,}01$.

Partie C

Soit G la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ par

$$\mathrm{G}(x) = x(\ln x)^2 - 4x\ln x + 4x - \frac{1}{2}x^2.$$

1. Vérifier que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $]0\,;\,10]$.
2. Sur le graphique ci-dessous figure la courbe $\mathscr{C}$. Tracer la droite T et hachurer le domaine Δ limité par la droite T, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
3. On admet que la droite T est toujours située au dessous de la courbe $\mathscr{C}$. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine.



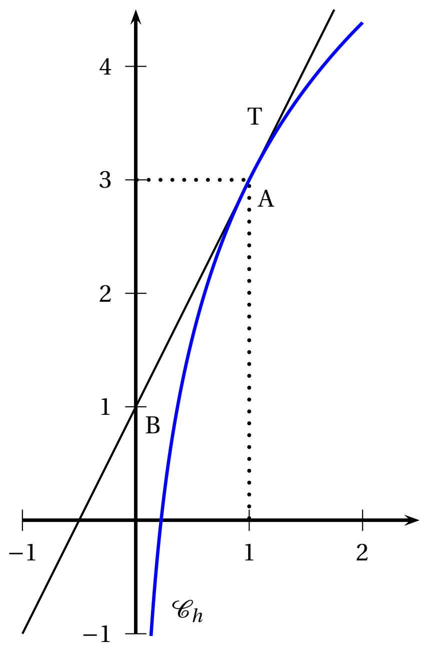
Exercice 6 : Antilles juin 2011 Génie Electronique

Partie A

On considère la fonction h dont la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ est tracée ci-contre. La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_h$ au point A de coordonnées $(1\,;3)$; cette droite coupe l'axe des ordonnées au point B de coordonnées $(0\,;1)$. On admet qu'il existe des nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x dans $]0\,;\,+\infty[$, $h(x) = a\ln x + b$.

Dans la question suivante, toute recherche, même incomplète, ou initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation :

Déterminer les nombres réels a et b.



Partie B

On considère la fonction g définie, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, par :

$$g(x) = 2x\ln x + x - 1.$$

1. On note g' la dérivée de la fonction g.
   Montrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a $g'(x) = 2\ln x + 3$.
2. A l'aide d'un tableau de valeurs à la calculatrice, déterminer les solutions de l'inéquation $2\ln(x) + 3 > 0$
3. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$. On y fera figurer les limites de g ainsi que sa valeur en 1.
5. Prouver que $g(x) < 0$ pour tout x appartenant à $]0\,;1[$ et $g(x) > 0$ pour tout x appartenant à $]1\,;\,+\infty[$.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2\ln x - x + 1.$$

On admet que la limite de la fonction f en 0 est égale à 1.

1. En remarquant que $f(x) = x(x\ln x - 1) + 1$ pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, calculer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que la fonction dérivée de f est la fonction g, définie dans la partie B.
   b. En déduire le tableau de variations de f.
3. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous. Pour chaque valeur, on inscrira dans le tableau l'arrondi au centième.

x	0,2	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$			0				

4. Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm), tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f. On utilisera une feuille de papier millimétré.

Partie D

Soit Δ la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ (construite dans la partie C) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

1. **a.** Hachurer la partie Δ sur le graphique construit dans la partie C.

   b. Par lecture graphique, encadrer par deux entiers consécutifs l'aire $\mathscr{A}$ de la partie Δ en centimètres carrés.

2. On admet que la fonction F définie pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + x$$

   est une primitive de la fonction f définie dans la partie C.
   Déterminer la valeur exacte puis l'arrondi au millième de l'aire $\mathscr{A}$ de Δ en centimètres carrés.

Exercice 7 : Nouvelle Calédonie novembre 2011 Génie Electronique

Dans tout le problème, on note I l'intervalle de $\mathbb{R}$ défini par $\mathrm{I} =]0\,;\,+\infty[$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par

$$g(x) = x^2 - 2\ln x + 2.$$

1. Pour tout réel x de l'intervalle I, déterminer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle I.
2. Dresser le tableau des variations de la fonction g sur l'intervalle I (les limites ne sont pas demandées).
3. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle I, on a $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x - 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 centimètres.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.

   b. En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe $\mathscr{C}$, notée D, dont on précisera une équation.

2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

   c. Préciser la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.

   b. En déduire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle I.

4. **a.** Calculer les images de 1 et de 2 par la fonction f.

   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α dans l'intervalle $[1\,;\,2]$.

   c. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

5. Établir une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
6. Tracer les droites D, , Δ et T puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle I par

$$h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

   Calculer $h'(x)$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1-(\ln 2)^2\right)$.
3. On considère l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, son asymptote Δ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = \mathrm{e}$.
   Déduire de la question précédente une valeur approchée de $\mathscr{A}$ en centimètres carrés à 10^{-2} près.