∽ EXERCICES ∽
LN

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **a.** Calculer $f'(x)$

   b. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A(1; 1)

2. A l'écran de la calculatrice, tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite T pour vérifier vos résultats.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 - 5\ln(x)$.

1. Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
2. **a.** Calculer $f'(x)$

   b. Dresser le tableau de variations de f
3. A l'écran de la calculatrice, tracer la courbe $\mathscr{C}$ pour vérifier vos résultats.

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 - 5\ln(x)$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. **a.** Calculer $f'(x)$

   b. Dresser le tableau de variations de f
3. A l'écran de la calculatrice, tracer la courbe $\mathscr{C}$ pour vérifier vos résultats.

Exercice 4 : Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ telle que $F(2) = 4$.

Exercice 5 : Résoudre $(0.9)^n \leq 0.5$ et $\ln(1.2)^n \geq 15$

Exercice 6 : **Métropole sept 2014 (exercice 2)** **(5 points)**

Une équipe aérospatiale se propose d'envoyer un satellite de 10 tonnes en orbite autour de la Terre par l'intermédiaire d'une fusée à un seul étage. Cette fusée a une masse à vide, c'est-à-dire sans carburant ni satellite, de 40 tonnes.

L'éjection des gaz permet à la fusée de décoller et de s'élever dans les airs jusqu'à la consommation totale du propergol, carburant contenu dans ses réservoirs. La vitesse d'éjection des gaz est $V_e = 3\,200$ m.s^{-1}.

La vitesse finale de la fusée vitesse atteinte lorsque les réservoirs sont vides, varie en fonction de la masse de propergol contenue au départ dans les réservoirs. Elle doit être de $8\,000$ m.s^{-1} pour permettre la mise en orbite souhaitée.

Le but de l'exercice est de déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre cette mise en orbite du satellite.

On note x la masse, en tonnes, de propergol contenu au décollage dans les réservoirs de la fusée. La masse x est comprise entre 100 et 900 tonnes. La masse totale de la fusée est alors $(x+50)$ tonnes.

Il est établi que la vitesse finale de la fusée, $f(x)$, exprimée en m$\cdot$ s^{-1}, est donnée par

$$f(x) = V_e \times [\ln(x+50) - \ln 50]$$

où x est un réel de l'intervalle $[100\,;\,900]$.

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[100\,;900]$, $f(x) = 3\,200 \times \ln(0,02x+1)$.

   On pourra choisir l'une ou l'autre des expressions de $f(x)$ pour répondre à chacune des questions suivantes.

2. **a.** Si les réservoirs contiennent au décollage 100 tonnes de propergol, quelle sera la vitesse finale de la fusée ?

   b. Avec 400 tonnes de propergol au décollage la mise en orbite sera-t-elle possible ?

3. **a.** Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f.

4. Déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre la mise en orbite souhaitée.

<u>Exercice 7</u> : Antille-Guyanne juin 2014 (exercice 4) **(6 points)**

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (2 - \ln x)\ln x.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal est donnée sur la feuille **ANNEXE**.

1. Lire sur le graphique la limite de la fonction f en 0. Retrouver ce résultat à l'aide de l'expression de $f(x)$.

2. Montrer que la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est définie par $f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x}$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x est dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ puis donner les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. **a.** On appelle A et B les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses (Voir le graphique). Calculer les abscisses des points A et B.

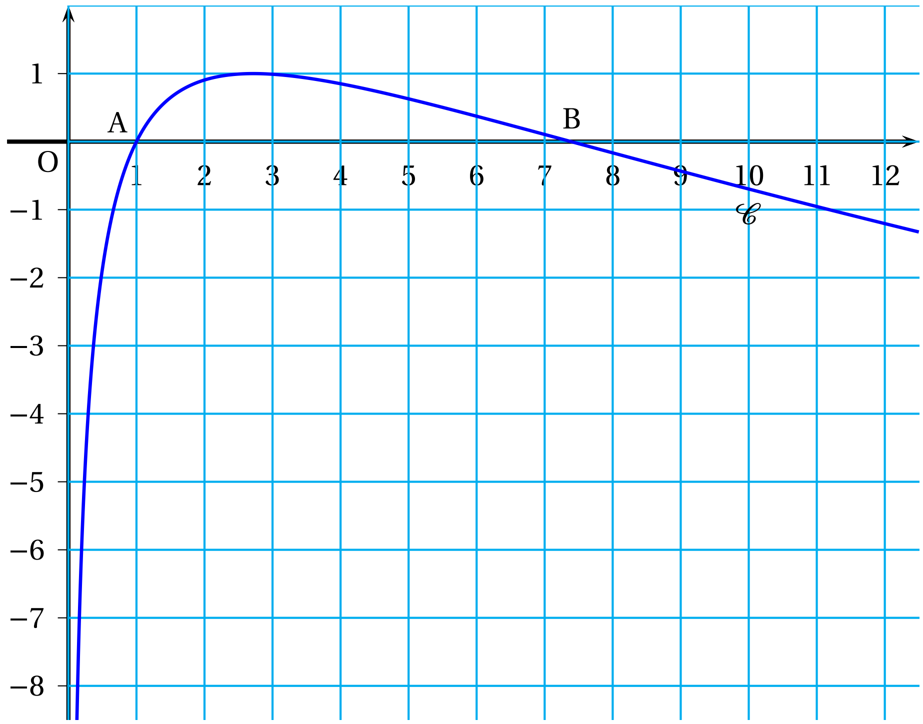
   b. Calculer le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A. Tracer la droite $\mathscr{T}$ sur le graphique donné en annexe.

5. Montrer que la fonction F définie par

$$\mathrm{F}(x) = -x(\ln x)^2 + 4x\ln x - 4x$$

   est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

ANNEXE à remettre avec la copie (page suivante)

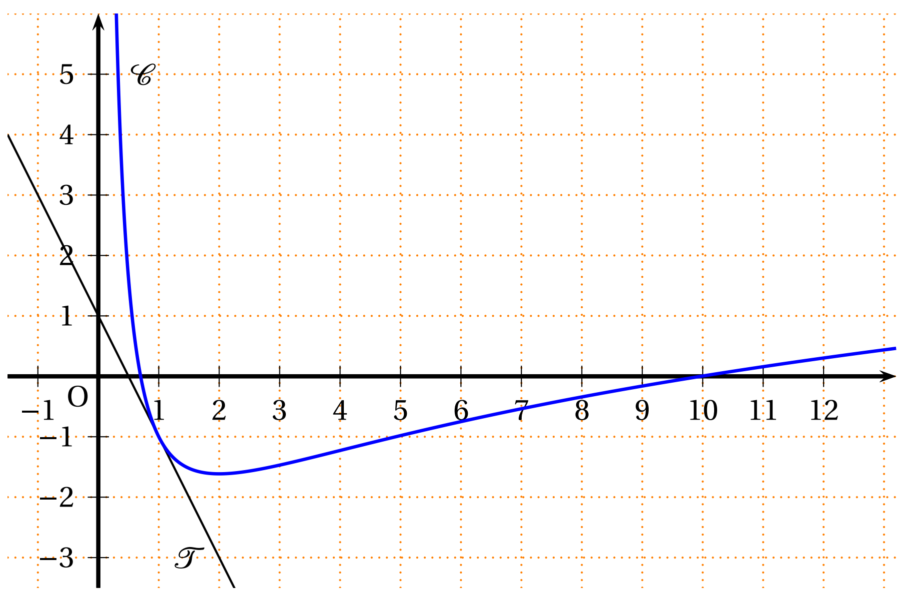


Exercice 8 : **Nouvelle Calédonie nov 2013 (exercice 3)** **(7 points)**

PARTIE A :

f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

f' désigne la fonction dérivée de f.



$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.

$\mathscr{T}$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1\ ;\ -1)$.

$\mathscr{T}$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

1. **a.** Par lecture graphique, déterminer $f(1)$.

   b. Déterminer $f'(1)$.

c. Donner une équation de $\mathcal{T}$.

2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = 2\ln x + \dfrac{a}{x} + b$ où a et b sont des nombres réels.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Déterminer alors les valeurs de a et b.

PARTIE B :
Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 2\ln x + \frac{4}{x} - 5.$$

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

2. **a.** Pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, vérifier que

$$f'(x) = \frac{2x-4}{x^2}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Établir le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. En précisant votre démarche, donner le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$, pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

5. **a.** Donner le signe de $f(x)$ pour x appartenant à $[1\,;\,3]$.

b. Vérifier que la fonction F définie pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ par

$$\mathrm{F}(x) = (2x+4)\ln x - 7x$$

est une primitive de f.

Exercice 9 : **Polynésie juin 2014 (exercice 4)** **(7 points)** Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

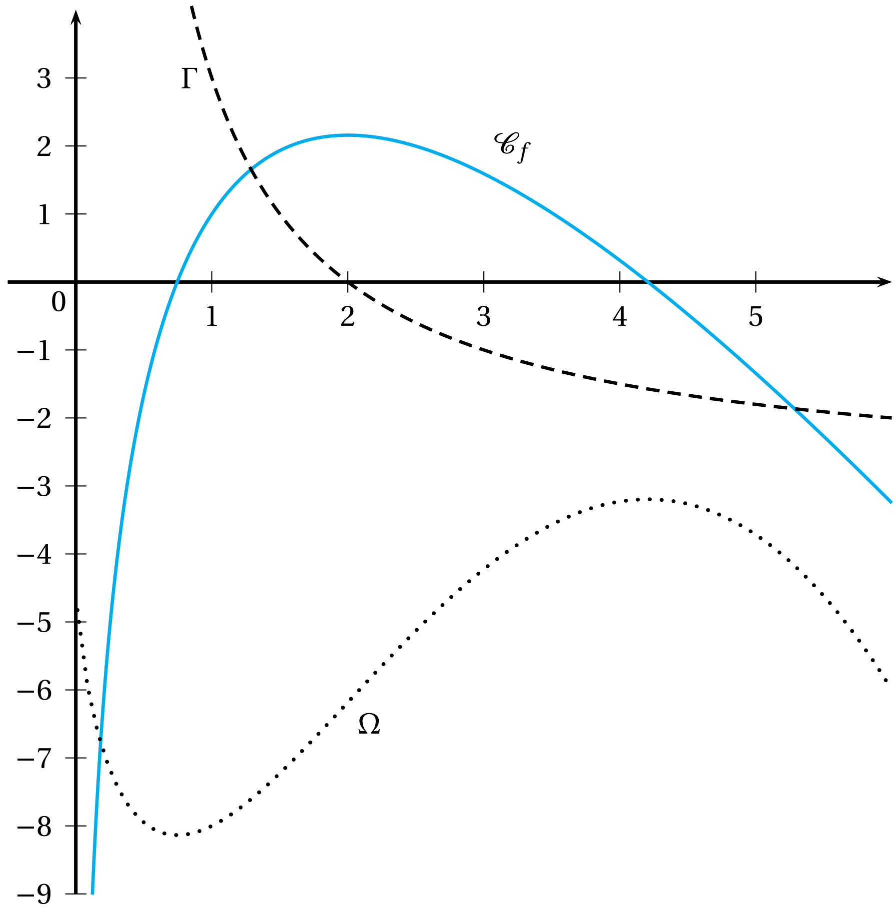
$$f(x) = 6\ln x + ax + b$$

où a et b sont des constantes réelles,
On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.
Le point A(1 ; 1) appartient à $\mathcal{C}_f$.
$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé $\mathcal{C}_f$ (trait plein) ainsi que les courbes Γ et Ω.

L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et l'autre représente une primitive F de f.



1. Indiquer laquelle des deux courbes est la représentation graphique de F.

2. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(2)$.

3. Donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de a.

4. À l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f(x) = 6\ln x - 3x + 4.$$

PARTIE B

Dans cette partie, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec la courbe $\mathscr{C}_f$ fournie dans la partie A.

1. Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.

2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3}{x}(2-x)$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner les variations de la fonction f.

4. En déduire que la fonction f admet un extremum dont on calculera la valeur exacte.

PARTIE C

Soit H la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$H(x) = 6x\ln x - \frac{3}{2}x^2 - 2x.$$

1. Montrer que H est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   a. À l'aide du graphique, donner la valeur de F(1).
   b. En déduire une expression de $F(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

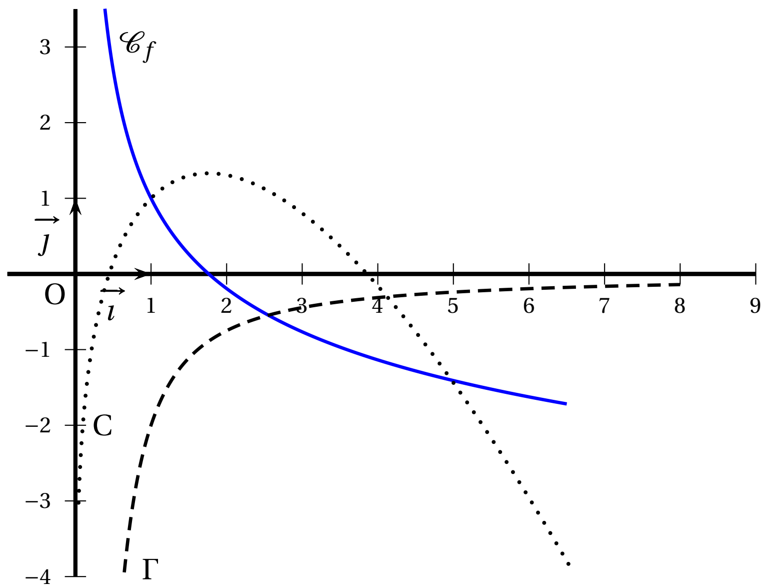
Exercice 10 : **Antilles Guyane juin 2013 (exercice 4)** **(6 points)**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Sur le graphique ci-dessous, on donne $\mathscr{C}_f$ et les courbes C et Γ. L'une de ces deux courbes représente graphiquement la dérivée f' de f, et l'autre une des primitives F de f.
   a. Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
   b. Par lecture graphique, donner F(1).



2. Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.
   a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   c. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire : $f'(x) = \dfrac{-x-1}{x^2}$.
   d. Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variations de f.
3. Soit H la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$H(x) = x - (x-1)\ln x.$$

   a. Montrer que H est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire l'expression de la fonction F de la question 1.