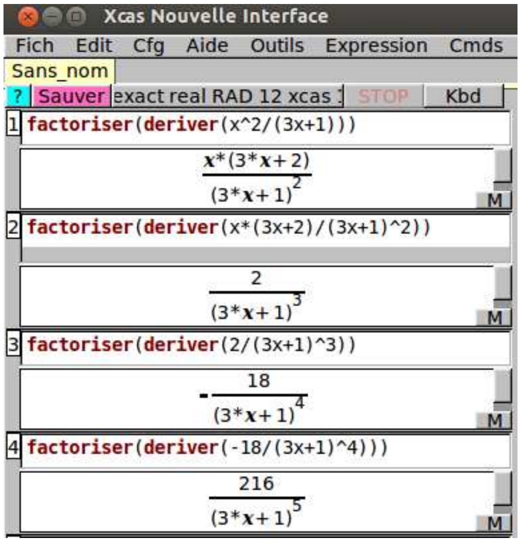
∾ EXERCICES ∾
PRIMITIVES

Exercice 1 : Pour cet exercice, on utilisera les réponses données par le logiciel Xcas.



1. Soient f, g, h, les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par

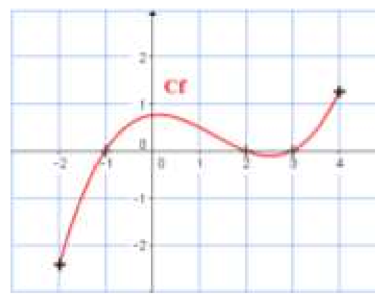
$$f(x)=\frac{x(3x+2)}{(3x+1)^2} \qquad g(x)=\frac{2}{(3x+1)^3} \qquad h(x)=\frac{x^2}{3x+1}$$

Dans chaque cas, entourer la bonne réponses

g est	une primitive de f	la dérivée de f
h est	une primitive de f	la dérivée de f
f est	une primitive de g	une primitive de h

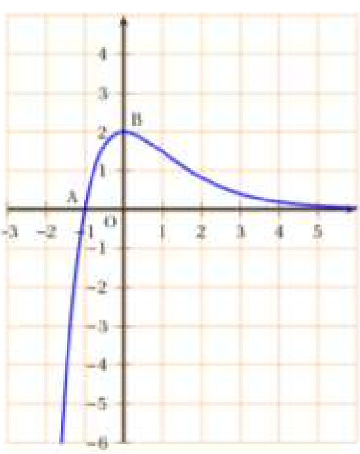
2. Soit r la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $r(x)=-\dfrac{18}{(3x+1)^4}$.

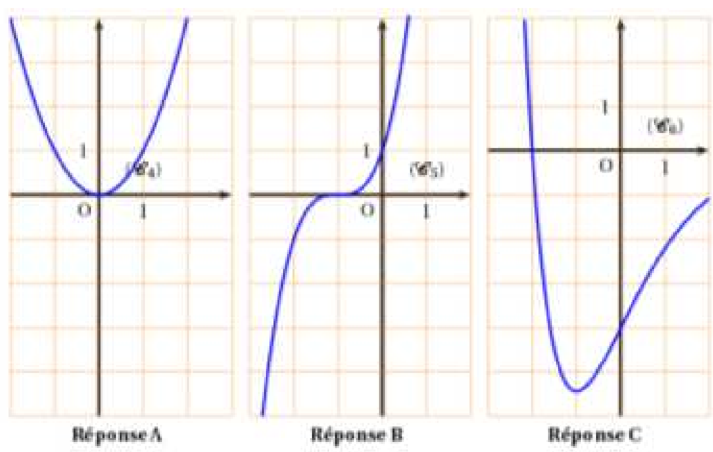
Donner deux primitives de r sur $[0;+\infty[$.



Exercice 2 : f est une fonction définie et dérivable sur $[-2;4]$.
Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-contre.
Par lecture graphique, dresser le tableau de variations d'une de ces primitives F.

Exercice 3 : f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-dessous à gauche.
Une des trois courbes ci-dessous à droite représente graphiquement une primitive de la fonction f.
Déterminer laquelle en justifiant.





Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+2x-7$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=x^3+x^2-7x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer toutes les fonctions G primitives de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la fonction G, primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(-1)=8$

Exercice 5 :

1. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f : x \longmapsto x^3 + 4x^2 - 5x + 1$
2. Donner les primitives sur $\mathbb{R}$ de f.
3. Déterminer la primitive de f telle que $f(0) = 2$

Exercice 6 :

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
2. Donner les primitives sur $\mathbb{R}$ de f.
3. Déterminer la primitive de f telle que $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$

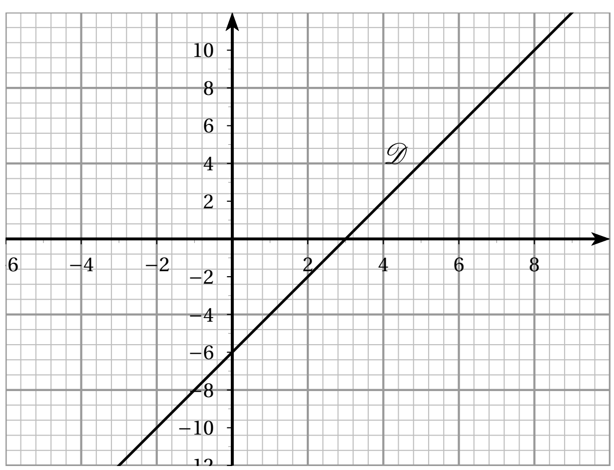
Exercice 7 :

1. **a.** Sur la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1;3]$ par $f(x) = 3(x^2 - 2x)$
   b. Compléter le tableau suivant à partir du graphique obtenu :

x	-1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 3
Signe de $f(x)$	

2. **a.** Déterminer la primitive F de f sur $[-1;3]$ telle que $F(0) = -2$
   b. En utilisant la question 1, établir le tableau de variation de F.
   c. A l'écran de votre calculatrice, tracer la courbe représentative de F et vérifier vos résultats.

Exercice 8 : La courbe suivante $\mathscr{D}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



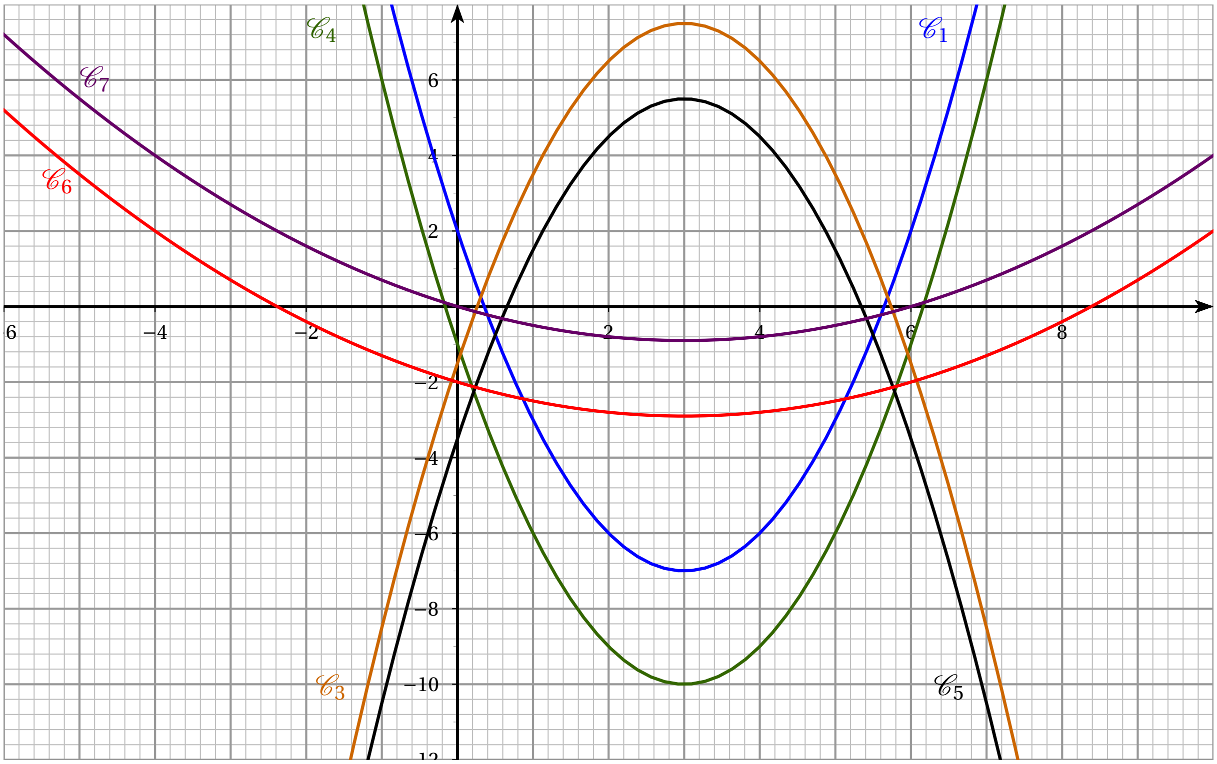
1. Par lecture graphique :

   ⇝ Etablir le tableau de signes de f $\qquad$ ⇝ Déterminer $f(2)$

2. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En justifiant, déduire de la question précédente :

   ⇝ le sens de variation de F $\qquad$ ⇝ La valeurs de $F'(2)$

3. Parmi les courbes ci-dessous, deux sont les courbes de primitives de f : lesquelles ? Pourquoi ?

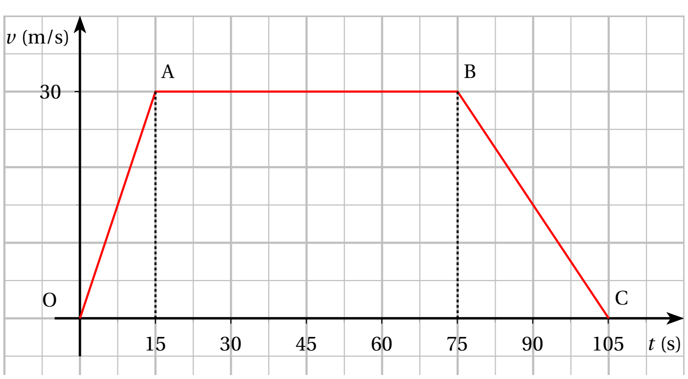


4. Déterminer graphiquement l'expression de f puis retrouver ces deux expressions.

Exercice 9 : On lance une balle du troisième étage de la tour Eiffel (279 mètres). Son mouvement est rectiligne uniformément accéléré par la pesanteur (9.8 m.s^{-2})

1. Ecrire la formule $a(t)$ de la fonction accélération en fonction du temps t en secondes
2. La fonction vitesse V est une primitive de la fonction accélération a.
   Ecrire la formule $\mathrm{V}(t)$ de la fonction vitesse en fonction du temps t.
3. La fonction distance parcourue D est une primitive de la fonction vitesse V.
   Ecrire la formule $\mathrm{D}(t)$ de la fonction distance parcourue en fonction du temps t.
4. a. En déduire le temps de chute de la balle
   b. Déterminer la vitesse de la balle au moment de l'impact
   c. Comparer avec la vitesse moyenne de la balle sur le trajet.

Exercice 10 : Un skieur professionnel se déplace sur une piste rectiligne. Le graphique ci-dessous représente l'évolution de sa vitesse v en m/s en fonction du temps t en secondes.



On se propose de déterminer l'expression de la distance d en mètres parcourue en fonction du temps t en secondes. Pour chaque phase du mouvement, la fonction vitesse v est la dérivée de la fonction d : ainsi, la fonction d est une primitive de la fonction v.

PARTIE A : **Phase 1 : Mouvement uniformément accéléré**

1. Montrer que $v = 2t$.
2. Déterminer la primitive F de v sur $[0;15]$ telle que $F(0) = 0$.
3. Pour t appartenant à $[0;15]$, la distance d est donnée par $d = F(t)$.
   Quelle est la distance d_0 parcourue au bout de 15 secondes ?

PARTIE B : **Phase 2 : Mouvement uniforme**

Durant cette phase, la vitesse est constante : $v = 30$

1. Déterminer la primitive G de v sur $[15;75]$ telle que $G(15) = 225$.
2. Pour t appartenant à $[15;75]$, la distance d est donnée par $d(t) = G(t)$.
   Monter qu'au bout de 75 secondes, le skieur a parcouru 2 025 m.

PARTIE C : **Phase 3 : Mouvement uniformément décéléré.**

1. Déterminer une équation de la droite (BC).
2. En déduire que pour tout $t \in [75;105]$, la vitesse v est donnée par $v = -t + 105$
3. Déterminer la primitive H de v sur $[75;105]$ telle que $H(75) = 2025$.
4. Pour t appartenant à $[75;105]$, la distance d est donnée par $d(t) = H(t)$.
   Montrer que durant tout le trajet, le skieur a parcouru 2 0475 m.

Exercice 11 : On étudie le déplacement d'un chariot d'une machine pour découpage laser. Ce déplacement s'effectue en trois phases.

- Durant la phase 1, s'étendant sur l'intervalle de temps (en secondes) $[0,2]$, le mouvement du chariot est uniformément accéléré et le chariot passe d'une vitesse iinitiale nulle à une vitesse de 10 cm/s.
- Durant la phase 2, le chariot évolue à vitesse constante pendant l'intervalle de temps $[2,10]$.
- Durant la phase 3, s'étendant sur l'intervalle de temps $[10;12.5]$, le mouvement du chariot est uniformément retardé et le chariot passe d'une vitesse de 10 cm/s à une vitesse nulle.

On cherche à déterminer la distance parcourue par le chariot en fonction du temps.

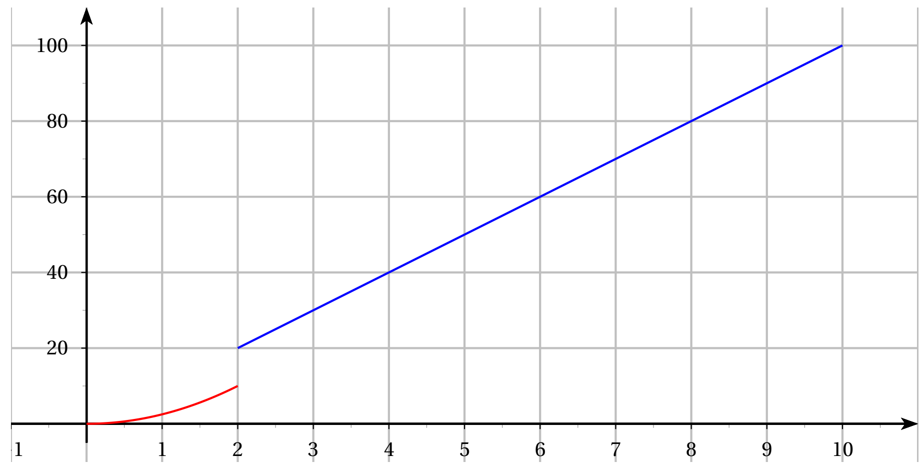
PARTIE A : **Fonction vitesse**

Durant chacune des trois phases du mouvement, l'accélération a du chariot est constante : $a > 0$ sur $[0;2]$, $a = 0$ sur $[2;10]$ et $a < 0$ sur $[10;12.5]$.
On rappelle que sur chacun de ces intervalles, la fonction v correspondante à la vitesse du chariot est une primitive de celle correspondant à l'accélération a.

1. Tracer la représentation graphique de la fonction v en fonction du temps.
2. Montrer que si $t \in [0;2]$ alors $v(t) = 5t$
3. Montrer que si $t \in [10;12.5]$ alors $v(t) = -4t + 50$

PARTIE B : **Recherche de la distance parcourue**

On rappelle que pour chacune des phase, la fonction d correspondante à la distance parcourue par le chariot en fonction du temps est une primitve de celle correspondant à la vitesse v.
Dans un fichier géogébra, on a tracé une primitive de v pour les deux première phase.



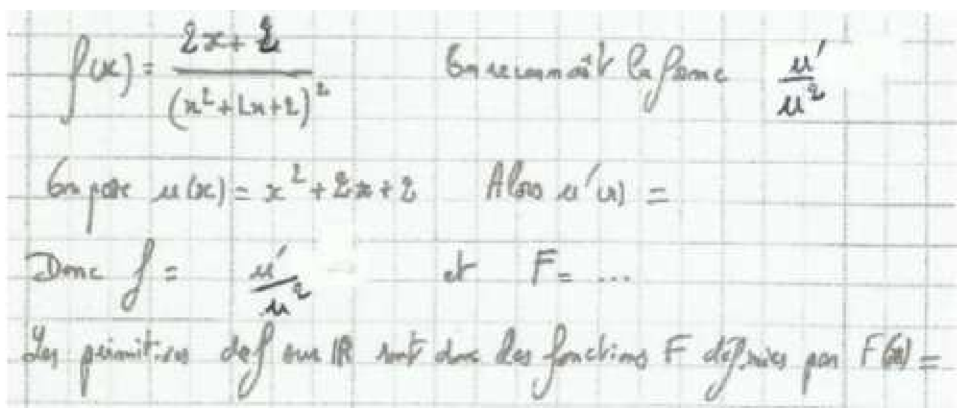
1. Qu'est-ce qui ne convient pas ? Pourquoi ?
2. De quelle condition initiale pour la fonction d sur l'intervalle $[2;10]$ doit-on tenir compte ?
3. Quelle est alors cette primitive ?
4. Déterminer la primitive d de v sur l'intervalle $[10;12.5]$ en précisant la condition initiale.
5. Déterminer alors la distance parcourue par le chariot au bout de 12.5 secondes.

Exercice 12 :

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x\left(3x^2-1\right)^5$
2. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 18(6x+1)^3$

Exercice 13 :

1. Compléter la recherche de primitive ci-contre.
2. En procédant de même, déterminer les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{10}{(5x+7)^2}$


$f(x) = \dfrac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}$ On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u^2}$

On pose $u(x) = x^2+2x+2$ Alors $u'(x) =$

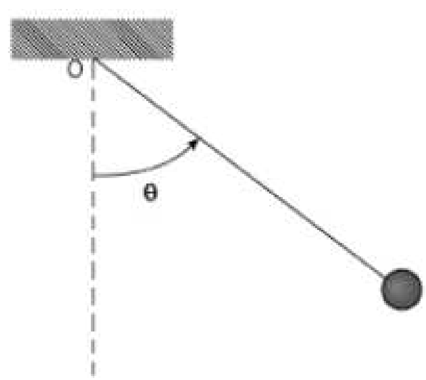
Donc $f = \dfrac{u'}{u^2}$ et $F = \ldots$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions F définies par $F(x) =$

Exercice 14 :

Dans le mouvement d'un pendule (sans frottement et pour de petites oscillations), la vitesse angulaire en radians par secondes est donnée par :

$$\theta'(t) = \frac{\pi}{10}\cos(2t) \quad \text{où } t \text{ est un temps en secondes}$$



Dans ce type de modèle on sait de plus que l'angle est exprimé en fonction du temps sous la forme $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$ où

- θ_0 est l'angle maximal du pendule avec la verticale
- $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ avec T période du mouvement en secondes.

1. Déterminer $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$
2. En déduire l'angle maximal θ_0 et la période T du mouvement en secondes