II) Calculs de limites

Dans tout ce qui suit :

- u et v sont deux fonctions définies sur un même intervalle I
- α peut être remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$ ou un réel a.
- L et L$'$ désignent deux nombres réels.

II.1. Produit d'une fonction par une constante $k \neq 0$: $\lim\limits_{x \to \alpha} k \times u(x)$

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) =$	L	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} k \times u(x) =$			

Exemples :

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -3x^2 \quad ; \quad g(x) = -2x \quad \text{et} \quad h(x) = 4x^3 + 7$$

Dresser ensuite leur tableau de variations complet.

II.2. Somme de deux fonctions : $\lim\limits_{x \to \alpha} \big(u(x)+v(x)\big)$

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	L			$+\infty$		$-\infty$
Et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	L$'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \big(u(x)+v(x)\big) =$						

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 4x^2 - \dfrac{10}{x} + 3$.
   Déterminer si possible sa limite en $+\infty$ et en 0.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 5x$.
   Déterminer si possible sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 5x^2$.
   Déterminer si possible sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

II.3. Produit de deux fonctions : $\lim\limits_{x\to\alpha}\big(u(x)\times v(x)\big)$

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	L	$\text{L}\neq 0$		0		$+\infty$ ou $-\infty$
Et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\big(u(x)\times v(x)\big) =$						

Exemples :

1. En utilisant les exemples précédents, compléter :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4x^2-\frac{10}{x}+3\right)(-3x^2) = \ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(4x^2-\frac{10}{x}+3\right)(-3x^2) = \ldots$$

2. **a.** Montrer que $x^3+5x^2 = x^3\left(1+\dfrac{5}{x}\right)$.

b. En déduire la limite de x^3+5x^2 en $-\infty$

Théorème 1.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3+27x+1$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3. Etablir le tableau de variation complet de f. Pour cela :

a. Calculer de $f'(x)$

b. Résoudre $f'(x) = 0$

c. Dresser un tableau avec le signe de $f'(x)$ puis les variations de f

II.4. Inverse d'une fonction : $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{u(x)}$

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) =$	$\mathrm{L} \neq 0$	0	$\pm\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{u(x)} =$			

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
2. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
3. Déterminer $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} f(x)$
4. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?

II.5. Quotient de deux fonctions : $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{u(x)}{v(x)}$

On utilisera le fait que

$$\frac{u(x)}{v(x)}=\ldots\ldots\times\ldots\ldots$$

Mais cette méthode n'est pas toujours concluante...

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0.5[\cup]0.5;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-5}{2x-1}$.

1. **Limites en** 0.5 :
   - **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0.5} 3x^2+4x-5$
   - **b.** Déterminer $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0.5} \dfrac{1}{2x-1}$
   - **c.** En déduire $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0.5} f(x)$
   - **d.** En utilisant la même méthode, déterminer $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0.5} f(x)$
   - **e.** Quelle(s) asymptote(s) peut-on en déduire ?
2. **Limites en l'infini** :
   - **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+4x-5$
   - **b.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x-1}$
   - **c.** Peut-on alors déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$? Pourquoi ?

II.6. Fonctions composées : u^n avec $n\in\mathbb{N}$ et $\sqrt{u}$ avec $u>0$

<u>Travail de l'élève 4</u> : Soients u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=-2x+5$ et $v(x)=4x^2-5x+1$.

1. Déterminer les limites de u et v en $+\infty$ et en $-\infty$
2. On définit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\left(u(x)\right)^3=(-2x+5)^3 \qquad \text{et} \qquad g(x)=\left(v(x)\right)^{100}=(4x^2-5x+1)^{100}$$

   A votre avis, comment déterminer les limites de f et g en $+\infty$ et en $-\infty$?

3. On définit désormais les fonctions h et k par

$$h(x)=\sqrt{u(x)}=\sqrt{-2x+5} \qquad \text{et} \qquad k(x)=\sqrt{v(x)}=\sqrt{4x^2-5x+1}$$

   - **a.** Résoudre les inéquations $u(x)\geq 0$ et $v(x)\geq 0$
   - **b.** En déduire les domaines de définition des fonctions f et g.
   - **c.** A votre avis, comment déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$?