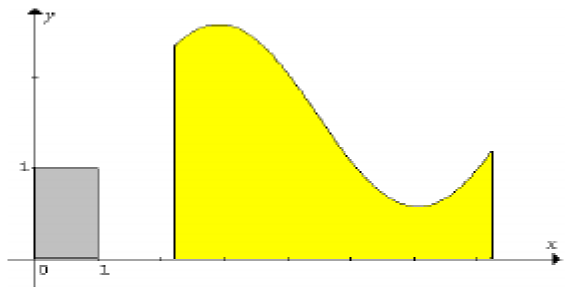
∽ Cours ∽
Calculs d'aires et Intégrales

I) Aire « sous une courbe » d'une fonction continue positive

I.1. Définition géométrique de l'intégrale

On se place dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.
On considère une fonction f qui est **continue**, ie dont la courbe se trace avec un trait continue, et **positive** sur un intervalle $[a;b]$.
on voudrait calculer l'aire du domaine colorié « sous la courbe représentative de f », ie l'aire située entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Cette aire s'exprime en unités d'aire (u.a.) : aire du rectangle de côté 1 unité sur chaque axe. Demander si quelqu'un a des idées de méthodes pour calculer cette aire puis montrer le fichier géogébra de la méthode des rectangles (pour justifier ensuite la notation dx dans l'intégrale et le $\int$)

On note cette aire $\int_a^b f(x)dx$, ce qui se lit « Intégrale de a à b de f ».

Remarques :

- ⇝ La notation $f(x)dx$ correspond à l'aire d'un rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur infiniment proche de 0, que l'on note dx. On doit ensuite sommer toutes ces aires, d'où la forme de S que prend l'intégrale.
- ⇝ Si f est positive, il est clair que son intégrale est alors positive.

Exemples :

1. Représenter graphiquement un domaine d'aire $\int_1^4 2dx$ et calculer cette aire.
2. Représenter graphiquement un domaine d'aire $\int_0^1 (2-x)dx$ et calculer cette aire.

I.2. Méthode de calcul d'une intégrale

Théorème 1.

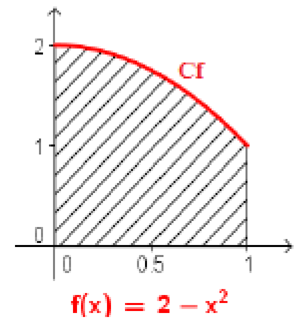
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F l'un de ses primitives sur $[a;b]$.

Alors l'aire sous la courbre représentative de f est donnée par $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 - x^2$ sur $[1;4]$.

Calculer $\displaystyle\int_1^4 (2-x^2)\,dx$.



Solution **:**

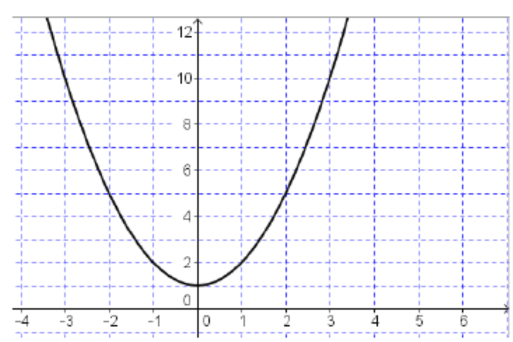
On suivra toujours ce modèle de rédaction :

$$\begin{aligned}
\int_1^4 (2-x^2)\,dx &= \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_1^4 && \text{On cherche une primitive F de } f \\
& && \text{et on l'écrit entre crochets avec les bornes} \\
&= 2\times 4 - \frac{4^3}{3} && \text{on écrit F}(b) \\
&\quad -\left(2\times 1 - \frac{1^3}{3}\right) && \text{on écrit } -\mathrm{F}(a) \text{avec des parenthèses !!} \\
&= 8 - \frac{256}{3} - \left(2 - \frac{1}{3}\right) && \text{on compte} \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

Exemple :

1. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 1$ et on nomme D le domaine délimité par la courbe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

   a. Hachurer le domaine D sur le graphique ci-dessous.

   b. Calculer l'aire de D

2. Calculer l'aire sous la courbe représentant la fonction $x \longmapsto \dfrac{20}{x}$ sur l'intervalle $[1;10]$

3. Calculer l'aire sous la courbe représentant la fonction $x \longmapsto \dfrac{20}{x+2}$ sur l'intervalle $[1;10]$

4. Calculer l'aire sous la courbe représentant la fonction $x \longmapsto \dfrac{20x}{x^2+2}$ sur l'intervalle $[1;10]$

I.3. Propriétés de l'intégrale

Propriété 1.

On considère une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

- linéarité 1 : Si k est un réel positif quelconque, alors

$$\int_a^b k \times f(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$$

- linéarité 2 : Si g est une fonction continue et positive sur $[a;b]$ alors

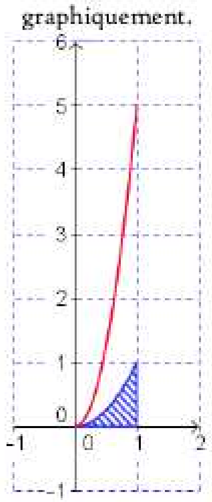
$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- Relation de Chasles : Si $c \in [a;b]$ alors

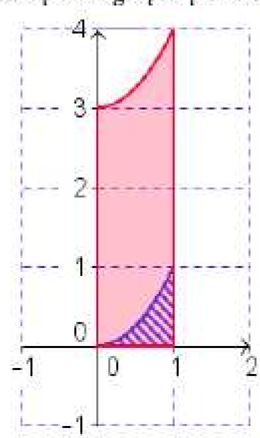
$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple :

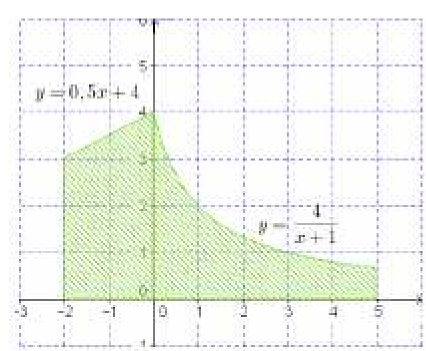
(i) Calculer $\int_0^1 5x^2\,dx$ et interpréter graphiquement.



(ii) Calculer $\int_0^1 (x^2+3)\,dx$ et interpréter graphiquement.



(iii) Calculer l'aire du domaine hachuré ci-dessous.



II) Aire et intégrale d'une fonction de signe quelconque

Cf cours de Fabrice, texto (merci !!)