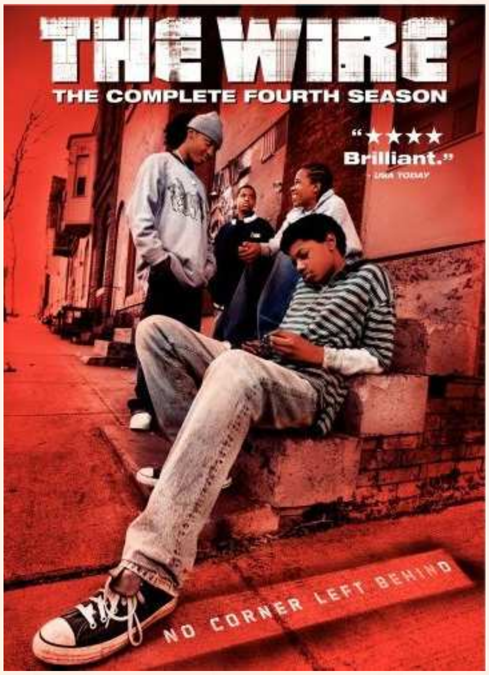
Chapitre 3

Primitives

Hors Sujet



Titre : « The Wire »
Auteur : David Simon
Présentation succinte : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et Ed Burns.

Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.

Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.

Le tour de force de la série est de s'engager, sur le plan social, en montrant sans détour les pans les plus sombres du décor américain, son revers le plus inavouable, tout en mettant en scène une multitude de points de vue réalistes qui multiplient les questions dérangeantes sans jamais proposer de solution miracle. Il n'y a pas de fausse objectivité rassurante et pas de subjectivité accusatrice sous-jacente, l'épisode ne fait que montrer le plus passivement possible, il en résulte un étrange bourdonnement qui persiste longtemps après sa diffusion.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- $\rightsquigarrow$ Déterminer l'ensemble des primitives de fonctions simples
- $\rightsquigarrow$ Déterminer la primitive d'une fonction simple vérifiant une condition initiale donnée
- $\rightsquigarrow$ Interpréter la dérivée et les primitives d'une fonction graphiquement

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 3:

PRIMITIVES

Au fil du temps

En mathématiques, la dérivation élémentaire est le calcul permettant de définir une variation de phénomène par unité de temps ou par unité géométrique. En bref, la fonction dérivée f' donne toutes les informations sur les variations de f ...
Pourtant, la découverte des fonctions dérivées ne se fit qu'au XVII^e et a été l'un des moments forts des mathématiques.
La dérivation a également été une extraordinaire découverte pour la Physique : la connaissance des variations d'une fonction s'est révélée essentielles à la description des phénomènes naturels car les théories physiques parlent avant tout des variations de la nature.

C'est Blaise Pascal qui, le premier, mène des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Grâce aux travaux de Fermat, on sait également qu'une fonction (continue) change son mode de variation en passant par un point où sa tangente a une pente nulle, l'extremum, ce qui renseigne sur la forme géométrique de cette fonction. Mais l'ambition des mathématiciens du XVII^e siècle est bien plus générale : il s'agit pour eux de montrer qu'une fonction contient dans son expression mathématique toutes les informations sur ses tangentes et, **inversement**, que les informations données par les tangentes à une fonction inconnue doivent permettre de reconstruire celle-ci (ce qui équivaut à reconstruire un trajet en voiture à partir uniquement de ses variations de vitesse et de direction). C'est cela qui nous intéressera dans ce chapitre.
Mais cette intuition sur le lien entre la fonction et ses tangentes se heurte à un problème : le nombre de tangentes à une courbe est infini car chaque point à la sienne ! Comme les mathématiciens de l'époque ne savent pas raisonner avec l'infini, il leur parait impossible de calculer la pente exacte d'une tangente au point $(x; f(x))$, d'autant plus qu'au sens géométrique un point n'a pas de tangente !

I) Rappels

Définition 1.

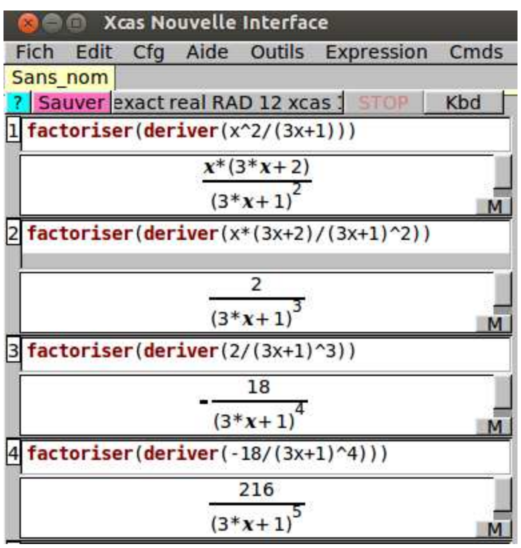
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable telle que $\forall x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Exemples :

- $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x^2 - 5$ sont des primitives de $x \longmapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.
- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + \cos x$
  Déterminons (mentalement) une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
  La fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \sin x$ convient.
  En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction F est dérivable (comme somme de fonctions qui le sont) et
  $$\mathrm{F}'(x) = \frac{3x^2}{3} - 2x + \cos x = f(x)$$
  Remarquons que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \sin x + 12$ convient aussi puisque la dérivée d'une constante est nulle.
- Montrer que F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{4}\cos(4x+2)$ est une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(4x+2)$

Remarque : Si f admet une primitive sur I, alors elle en admet une infinité.

Exercice 1 : Pour cet exercice, on utilisera les réponses données par le logiciel Xcas.



1. Soient f, g, h, les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par

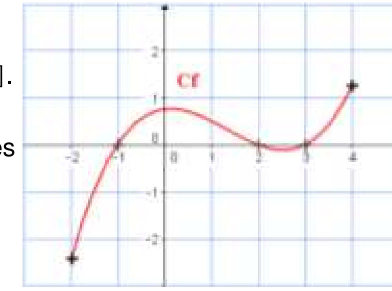
$$f(x) = \frac{x(3x+2)}{(3x+1)^2} \qquad g(x) = \frac{2}{(3x+1)^3} \qquad h(x) = \frac{x^2}{3x+1}$$

Dans chaque cas, entourer la bonne réponses

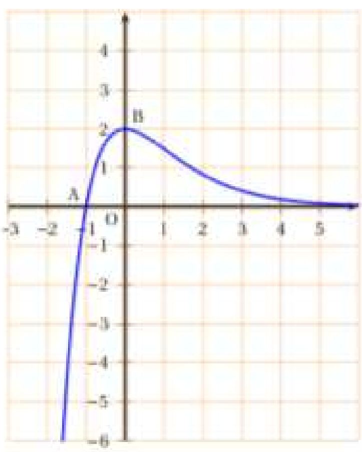
g est	une primitive de f	la dérivée de f
h est	une primitive de f	la dérivée de f
f est	une primitive de g	une primitive de h

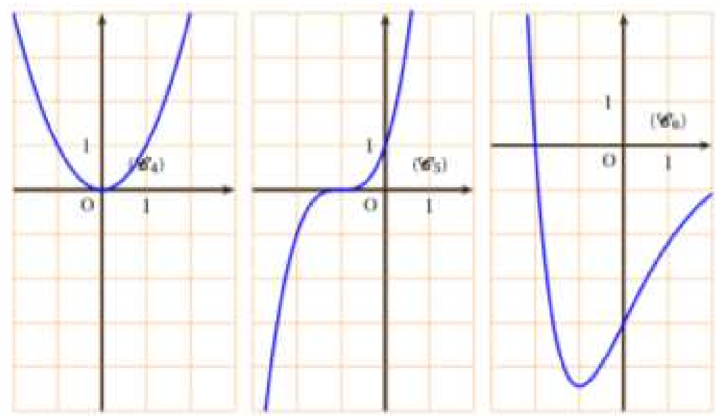
2. Soit r la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $r(x) = -\dfrac{18}{(3x+1)^4}$.
   Donner deux primitives de r sur $[0;+\infty[$.

Exercice 2 : f est une fonction définie et dérivable sur $[-2;4]$.
Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-contre.
Par lecture graphique, dresser le tableau de variations d'une de ces primitives F.



Exercice 3 : f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-dessous à gauche.
Une des trois courbes ci-dessous à droite représente graphiquement une primitive de la fonction f.
Déterminer laquelle en justifiant.





Réponse A Réponse B Réponse C

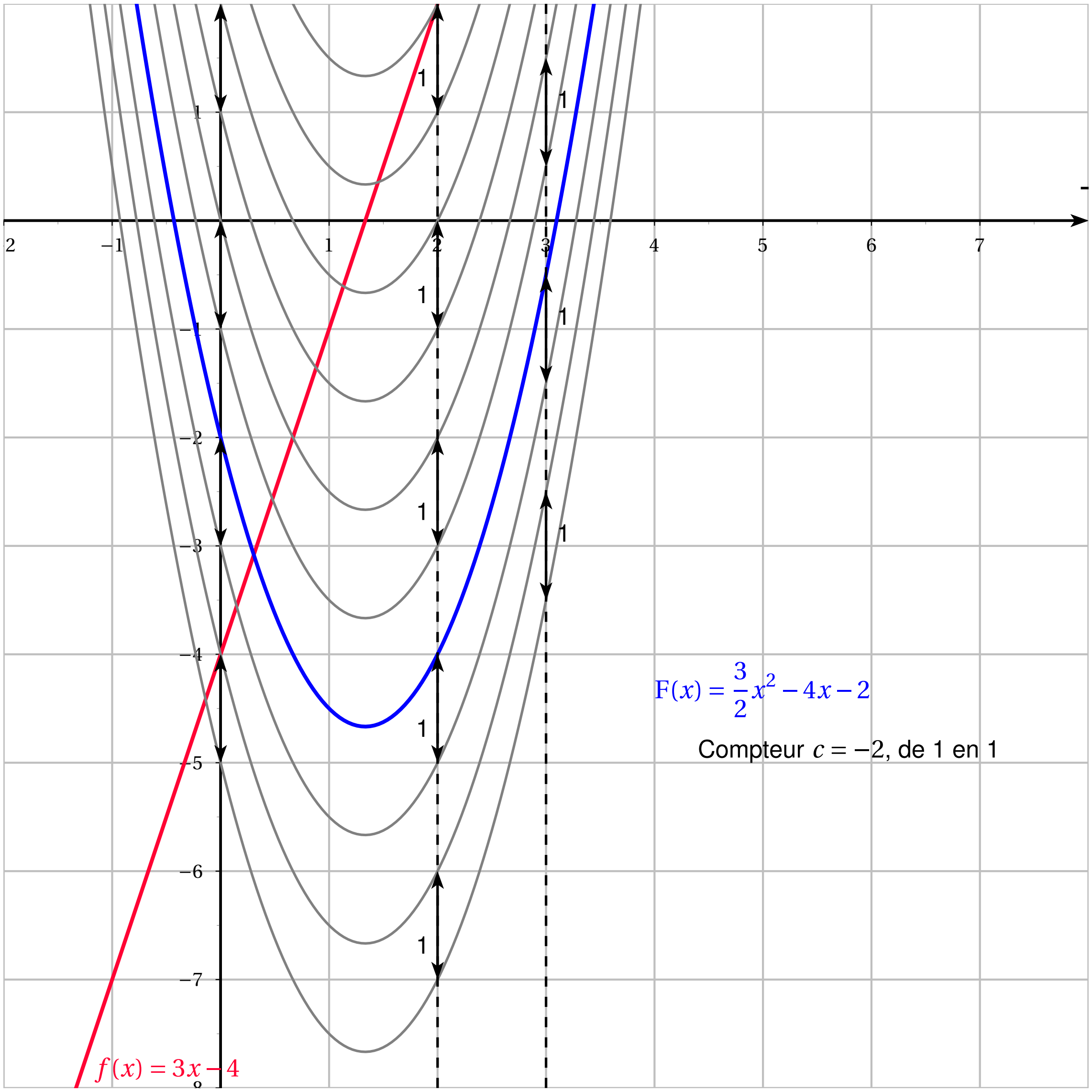
II) Existence et unicité

Théorème 1.

Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle I. Alors les primitives de f sur I sont les fonctions du type $x \longmapsto \mathrm{F}(x)+c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Soient a et b deux nombres réels.
Il existe une unique primitive F de f sur I satisfaisant la condition initiale $\mathrm{F}(a) = b$

Illustration :



On a bien $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or :

$$F'(x) = 0 \iff f(x) = 0 \iff 3x - 4 = 0 \iff x = \frac{4}{3}$$

Ce qui donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de $F'(x) = f(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de F	$+\infty$	$\searrow$	$F\left(\frac{4}{3}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Peut-on trouver une primitive F de f tel que $F(2) = 4$?

Exemple :

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto x^4$
2. Donner toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de f.
3. Déterminer la primitive de f telle que $f(5) = 7$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = x^3 + x^2 - 7x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer toutes les fonctions G primitives de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la fonction G, primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{G}(-1) = 8$

III) Retrouver des primitives

Dans ce qui suit, a, b et C sont des constantes réelles quelconques et n est un entier positif non nul.

$f(x)$	$F(x)$	Intervalle de validité
a (constante)	$ax + C$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + C$	$\mathbb{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n} \quad (n \neq 1)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$\mathbb{R}$

Exemple :

Trouver les fonctions primitives des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^{2014} \qquad f(x) = \frac{1}{x^{2014}} \qquad f(x) = \sin(3x-4) \qquad f(x) = \cos(3x-4)$$

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I admettant pour primitive respective une fonction U et une fonction V. Alors :

- ⇝ les primitives de la fonction $f(x) = au(x)$ sur I sont les fonctions $F(x) = aU(x) + C$
- ⇝ les primitives de la fonction $f(x) = u(x) + v(x)$ sur I sont les fonctions $F(x) = U(x) + V(x) + C$

Exemple :

Ceci permet notamment de trouver les primitives de n'importe quel polynôme.
Trouver les fonctions primitives des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4x^2 - 2x + 1 \qquad f(x) = 2x^{10} - 6x^5 + 16x^2 + 0.7$$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

$f(x)$	$\mathrm{F}(x)$
$u'(x)\times u(x)$	$\frac{1}{2}\left(u(x)\right)^2+\mathrm{C}$
$u'(x)\times\left(u(x)\right)^n$	$\frac{1}{n+1}\left(u(x)\right)^{n+1}+\mathrm{C}$
$\frac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$	$-\frac{1}{u(x)}+\mathrm{C}$
$\frac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^n}\quad(n\neq 1)$	$-\frac{1}{(n-1)\left(u(x)\right)^{n-1}}+\mathrm{C}$

Exemple :
Trouver les fonctions primitives des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=2x\times\left(x^2-1\right)^4$ $\quad f(x)=10\times(10x-2.2)^9$ $\quad f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad f(x)=\frac{6x}{\left(3x^2+1\right)^2}$

Exercice 5 :

1. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f: x\longmapsto x^3+4x^2-5x+1$
2. Donner les primitives sur $\mathbb{R}$ de f.
3. Déterminer la primitive de f telle que $f(0)=2$

Exercice 6 :

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x\longmapsto \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$
2. Donner les primitives sur $\mathbb{R}$ de f.
3. Déterminer la primitive de f telle que $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$

Exercice 7 :

1. **a.** A l'écran de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1;3]$ par $f(x)=3(x^2-2x)$.

   b. Compléter le tableau suivant à partir du graphique obtenu :

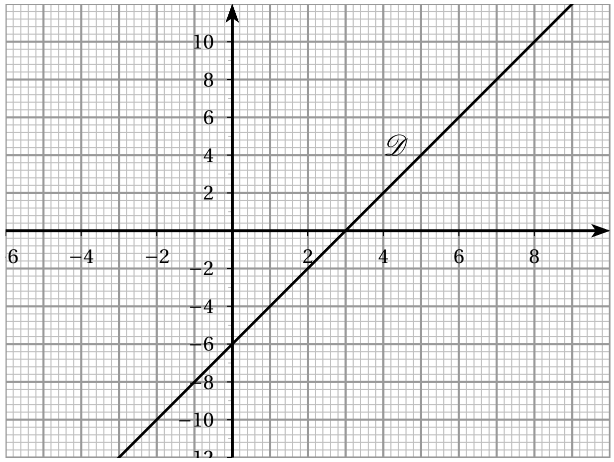
x	-1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 3
Signe de $f(x)$	

2. **a.** Déterminer la primitive F de f sir $[-1;3]$ telle que $\mathrm{F}(0)=-2$

   b. En utilisant la question 1, établir le tableau de variation de F.

   c. A l'écran de votre calculatrice, tracer la courbe représentative de F et vérifier vos résultats.

Exercice 8 : La courbe suivante $\mathscr{D}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



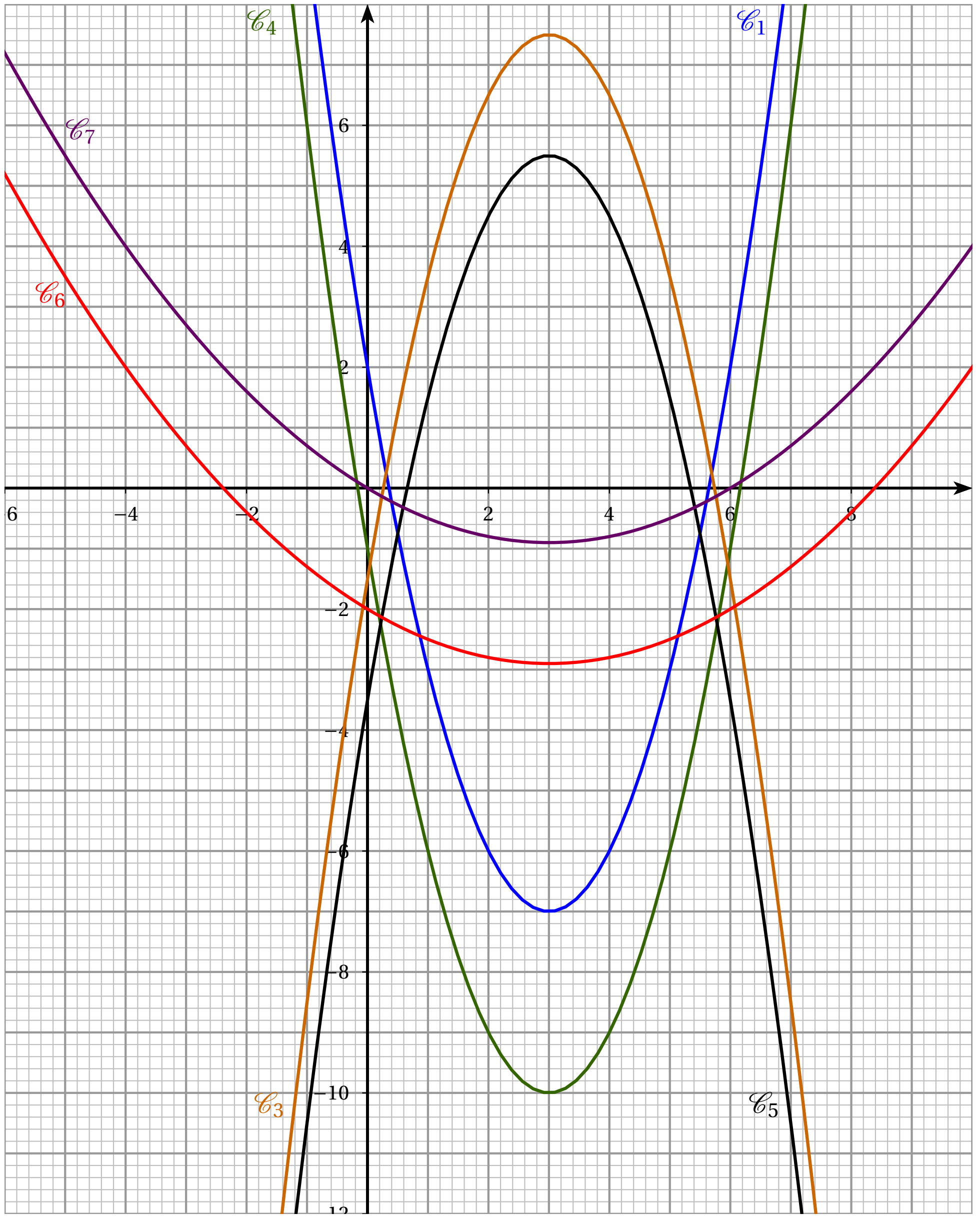
1. Par lecture graphique :

⇝ Etablir le tableau de signes de f ⇝ Déterminer $f(2)$

2. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En justifiant, déduire de la question précédente :

⇝ le sens de variation de F ⇝ La valeurs de $F'(2)$

3. Parmi les courbes ci-dessous, deux sont les courbes de primitives de f : lesquelles ? Pourquoi ?

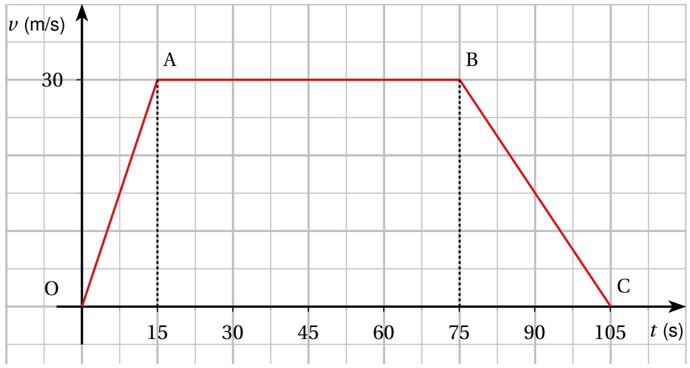


4. Déterminer graphiquement l'expression de f puis retrouver ces deux expressions.

Exercice 9 : On lance une balle du troisième étage de la tour Eiffel (279 mètres).
Son mouvement est rectiligne uniformément accéléré par la pesanteur (9.8 m.s^{-2})

1. Ecrire la formule $a(t)$ de la fonction accélération en fonction du temps t en secondes
2. La fonction vitesse V est une primitive de la fonction accélération a.
   Ecrire la formule $\mathrm{V}(t)$ de la fonction vitesse en fonction du temps t.
3. La fonction distance parcourue D est une primitive de la fonction vitesse V.
   Ecrire la formule $\mathrm{D}(t)$ de la fonction distance parcourue en fonction du temps t.
4. **a.** En déduire le temps de chute de la balle
   b. Déterminer la vitesse de la balle au moment de l'impact
   c. Comparer avec la vitesse moyenne de la balle sur le trajet.

Exercice 10 : Un skieur professionnel se déplace sur une piste rectiligne. Le graphique ci-dessous représente l'évolution de sa vitesse v en m/s en fonction du temps t en secondes.



On se propose de déterminer l'expression de la distance d en mètres parcourue en fonction du temps t en secondes.
Pour chaque phase du mouvement, la fonction vitesse v est la dérivée de la fonction d : ainsi, la fonction d est une primitive de la fonction v.

PARTIE A : **Phase 1 : Mouvement uniformément accéléré**

1. Montrer que $v = 2t$.
2. Déterminer la primitive F de v sur $[0;15]$ telle que $\mathrm{F}(0) = 0$.
3. Pour t appartenant à $[0;15]$, la distance d est donnée par $d = \mathrm{F}(t)$.
   Quelle est la distance d_0 parcourue au bout de 15 secondes ?

PARTIE B : **Phase 2 : Mouvement uniforme**

Durant cette phase, la vitesse est constante : $v = 30$

1. Déterminer la primitive G de v sur $[15;75]$ telle que $\mathrm{G}(15) = 225$.
2. Pour t appartenant à $[15;75]$, la distance d est donnée par $d(t) = \mathrm{G}(t)$.
   Monter qu'au bout de 75 secondes, le skieur a parcouru 2 025 m.

PARTIE C : **Phase 3 : Mouvement uniformément décéléré.**

1. Déterminer une équation de la droite (BC).
2. En déduire que pour tout $t \in [75;105]$, la vitesse v est donnée par $v = -t + 105$
3. Déterminer la primitive H de v sur $[75;105]$ telle que $\mathrm{H}(75) = 2025$.
4. Pour t appartenant à $[75;105]$, la distance d est donnée par $d(t) = \mathrm{H}(t)$.
   Montrer que durant tout le trajet, le skieur a parcouru 2 0475 m.

Exercice 11 : On étudie le déplacement d'un chariot d'une machine pour découpage laser. Ce déplacement s'effectue en trois phases.

- Durant la phase 1, s'étendant sur l'intervalle de temps (en secondes) $[0,2]$, le mouvement du chariot est uniformément accéléré et le chariot passe d'une vitesse iinitiale nulle à une vitesse de 10 cm/s.
- Durant la phase 2, le chariot évolue à vitesse constante pendant l'intervalle de temps $[2,10]$.
- Durant la phase 3, s'étendant sur l'intervalle de temps $[10;12.5]$, le mouvement du chariot est uniformément retardé et le chariot passe d'une vitesse de 10 cm/s à une vitesse nulle.

On cherche à déterminer la distance parcourue par le chariot en fonction du temps.

PARTIE A : **Fonction vitesse**

Durant chacune des trois phases du mouvement, l'accélération a du chariot est constante : $a > 0$ sur $[0;2]$, $a = 0$ sur $[2;10]$ et $a < 0$ sur $[10;12.5]$.
On rappelle que sur chacun de ces intervalles, la fonction v correspondante à la vitesse du chariot est une primitive de celle correspondant à l'accélération a.

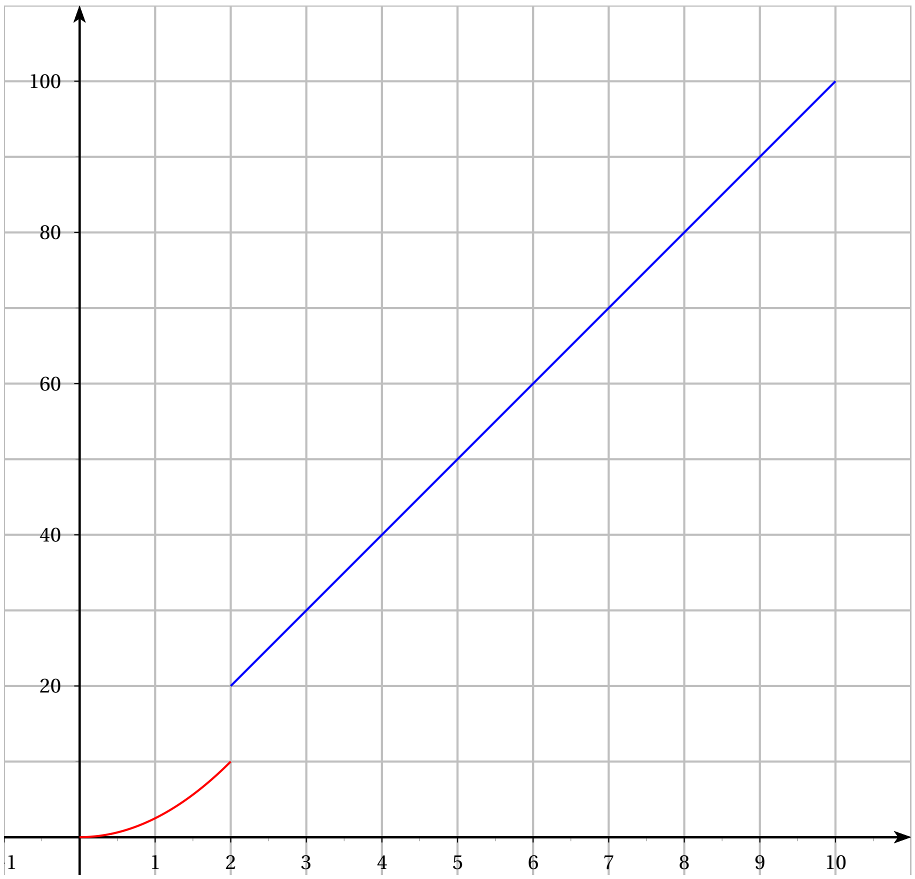
1. Tracer la représentation graphique de la fonction v en fonction du temps.
2. Montrer que si $t \in [0;2]$ alors $v(t) = 5t$

3. Montrer que si $t \in [10; 12.5]$ alors $v(t) = -4t + 50$

PARTIE B : **Recherche de la distance parcourue**

On rappelle que pour chacune des phase, la fonction d correspondante à la distance parcourue par le chariot en fonction du temps est une primitve de celle correspondant à la vitesse v.

Dans un fichier géogébra, on a tracé une primitive de v pour les deux première phase.



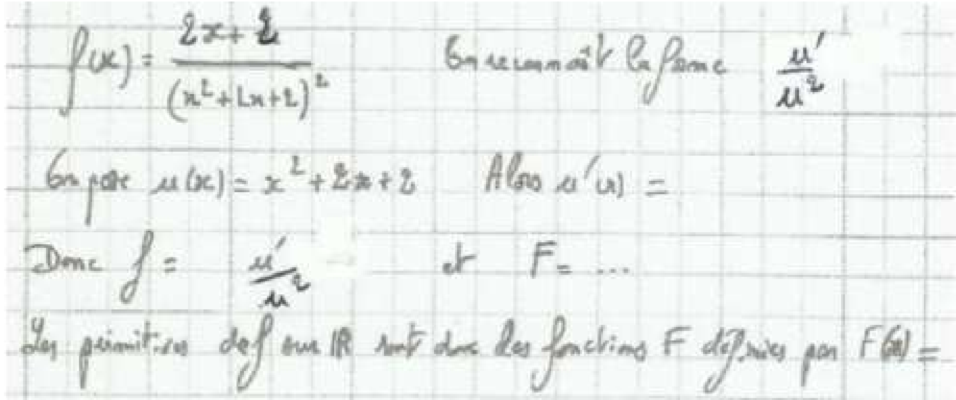
1. Qu'est-ce qui ne convient pas ? Pourquoi ?
2. De quelle condition initiale pour la fonction d sur l'intervalle $[2; 10]$ doit-on tenir compte ?
3. Quelle est alors cette primitive ?
4. Déterminer la primitive d de v sur l'intervalle $[10; 12.5]$ en précisant la condition initiale.
5. Déterminer alors la distance parcourue par le chariot au bout de 12.5 secondes.

Exercice 12 :

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x\left(3x^2 - 1\right)^5$
2. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 18(6x + 1)^3$

Exercice 13 :

1. Compléter la recherche de primitive ci-contre.
2. En procédant de même, déterminer les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{10}{(5x+7)^2}$



$f(x) = \dfrac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}$ On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u^2}$

On pose $u(x) = x^2+2x+2$ Alors $u'(x) =$

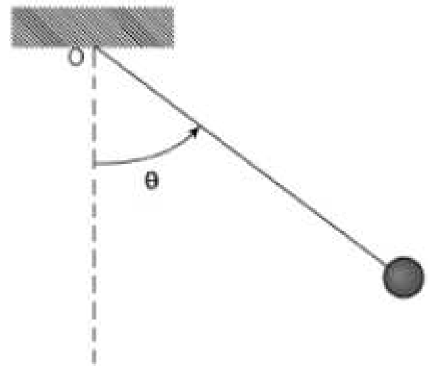
Donc $f = \dfrac{u'}{u^2}$ et $F = \ldots$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions F définies par $F(x) =$

Exercice 14 :

Dans le mouvement d'un pendule (sans frottement et pour de petites oscillations), la vitesse angulaire en radians par secondes est donnée par :

$$\theta'(t) = \frac{\pi}{10}\cos(2t) \quad \text{où } t \text{ est un temps en secondes}$$



Dans ce type de modèle on sait de plus que l'angle est exprimé en fonction du temps sous la forme $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$ où

- θ_0 est l'angle maximal du pendule avec la verticale
- $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ avec T période du mouvement en secondes.

1. Déterminer $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)$
2. En déduire l'angle maximal θ_0 et la période T du mouvement en secondes

Exercice(s) du livre : Foucher : fiches révisions p 91-92 (dérivée/primitives) et 59 à 61 (limites/asymptotes)