EXERCICES
PRIMITIVES

I) Rappels

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable telle que $\forall x \in \mathrm{I}$, ...

Exemples :

- Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = x^2$ et $\mathrm{G}(x) = x^2 - 5$ sont des primitives de la fonction f définie par $f(x) = \ldots$
- Montrer que F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{4}\cos(4x+2)$ est une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(4x+2)$
- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + \cos x$
  Déterminer mentalement une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Si f admet une primitive sur I, alors elle en admet ....

II) Existence et unicité

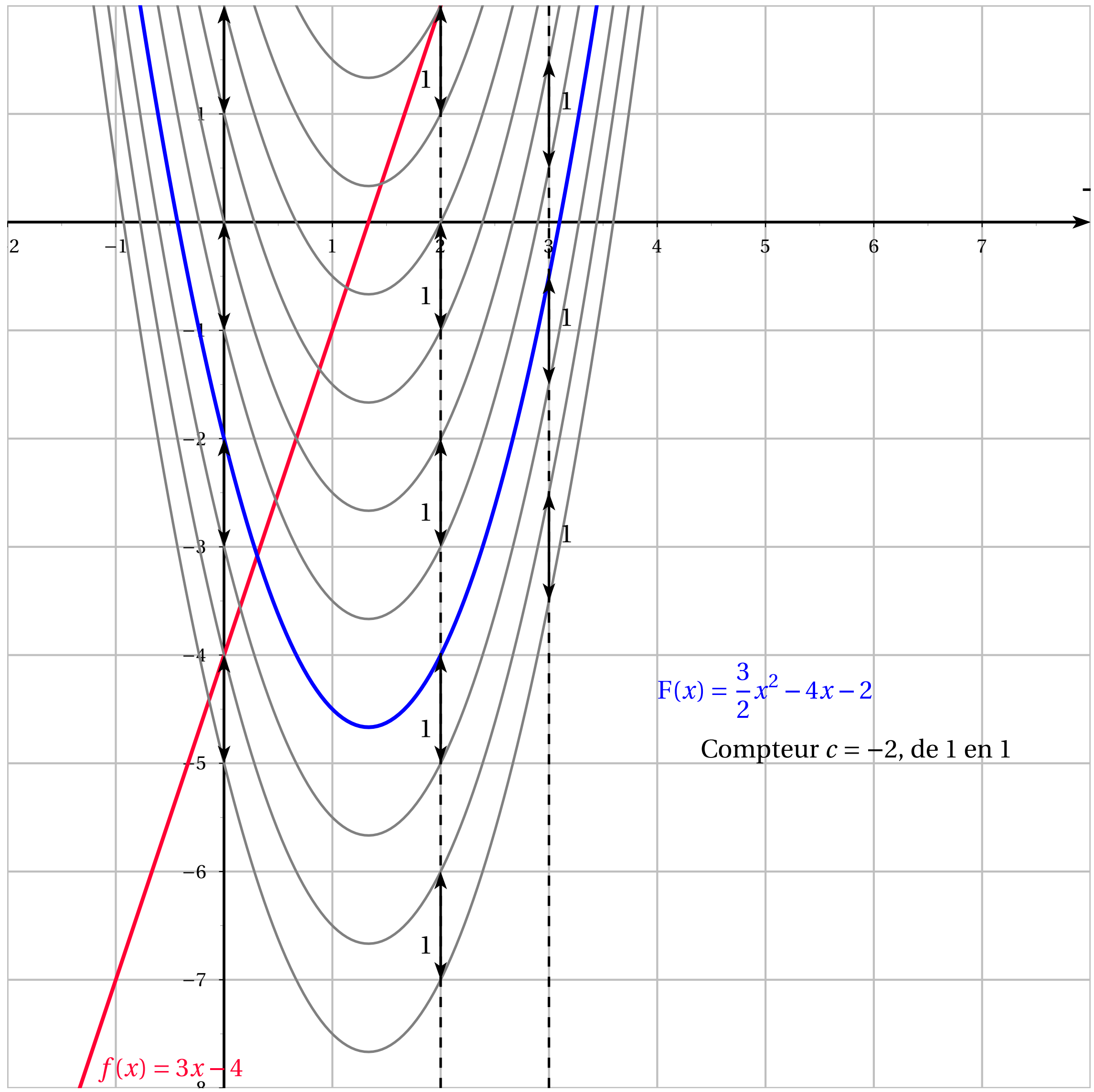
Théorème 1.

Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle I. Alors les primitives de f sur I sont les fonctions du type $x \longmapsto$ ....

Soient a et b deux nombres réels.
Il existe une unique primitive F de f sur I satisfaisant la condition initiale $\mathrm{F}(a) = b$

C. Aupérin
c.auperin@wicky-math.fr.nf

Illustration :



1. Vérifier que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Etudier le signe de $f(x)$
3. Compléter alors le tableau suivant :

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $F'(x) =$	
Variations de F	

4. Trouver la primitive F de f tel que $F(2) = 4$.

Exemple :

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto x^4$
2. Donner toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de f.
3. Déterminer la primitive de f telle que $f(5) = 7$

III) Retrouver des primitives

Dans ce qui suit, a, b et C sont des constantes réelles quelconques et n est un entier positif non nul.

Rappels du tableau des dérivées des fonctions de référence :

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble sur lequel on peut dériver
Si $f(x) = a$ (constante)	Alors	
Si $f(x) = x^2$	Alors	
Si $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	Alors	
Si $f(x) = \frac{1}{x}$	Alors	
Si $f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$	Alors	
Si $f(x) = \cos x$	Alors	
Si $f(x) = \sin x$	Alors	
Si $f(x) = \cos(ax+b)$	Alors	
Si $f(x) = \sin(ax+b)$	Alors	

Tableau des primitives des fonctions de référence :

Fonctions primitives F	Fonction f	Intervalle de validité
Alors	Si $f(x) = a$ (constante)	$\mathbb{R}$
Alors	Si $f(x) = x$	$\mathbb{R}$
Alors	Si $f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$
Alors	Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
Alors	Si $f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad (n \neq 1)$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
Alors	Si $f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
Alors	Si $f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
Alors	Si $f(x) = \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
Alors	Si $f(x) = \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

Exemple :

Trouver les fonctions primitives des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^{2014} \qquad f(x) = \frac{1}{x^{2014}} \qquad f(x) = \sin(3x-4) \qquad f(x) = \cos(3x-4)$$

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I admettant pour primitive respective une fonction U et une fonction V. Alors :

- ⇝ les primitives de la fonction $f(x) = u(x) + v(x)$ sur I sont les fonctions $F(x) = U(x) + V(x) + C$
- ⇝ les primitives de la fonction $f(x) = au(x)$ sur I sont les fonctions $F(x) = aU(x) + C$

Remarque : Ceci permet notamment de trouver les primitives de n'importe quel polynôme.

Exemple :

Trouver les fonctions primitives des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4x^2 - 2x + 1 \qquad f(x) = 2x^{10} - 6x^5 + 16x^2 + 0.7$$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonctions primitives F	Fonction f
Alors $F(x) = \frac{1}{2}\left(u(x)\right)^2 + C$	Si $f(x) = u'(x) \times u(x)$
Alors $F(x) = \frac{1}{n+1} \times \left(u(x)\right)^{n+1} + C$	Si $f(x) = u'(x) \times \left(u(x)\right)^n$
Alors $F(x) = -\frac{1}{u(x)} + C$	Si $f(x) = \frac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$
Alors $F(x) = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{\left(u(x)\right)^{n-1}} + C$	Si $f(x) = \frac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^n}$ $(n \neq 1)$

Exemple :

Trouver les fonctions primitives des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x\left(x^2-1\right)^4 \qquad f(x) = 10\,(10x-2.3)^9 \qquad f(x) = 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \qquad f(x) = \frac{6x}{\left(3x^2+1\right)^2}$$