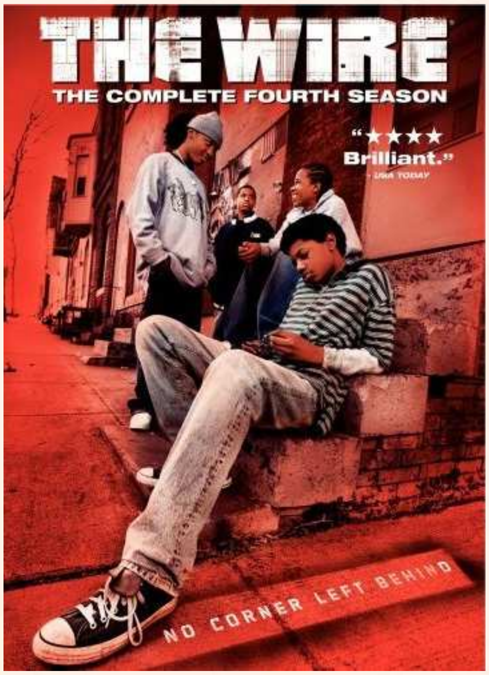
Chapitre 2

Limites de Fonctions

Hors Sujet



Titre : « The Wire »
Auteur : David Simon
Présentation succinte : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et Ed Burns.
Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.
Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.
Le tour de force de la série est de s'engager, sur le plan social, en montrant sans détour les pans les plus sombres du décor américain, son revers le plus inavouable, tout en mettant en scène une multitude de points de vue réalistes qui multiplient les questions dérangeantes sans jamais proposer de solution miracle. Il n'y a pas de fausse objectivité rassurante et pas de subjectivité accusatrice sous-jacente, l'épisode ne fait que montrer le plus passivement possible, il en résulte un étrange bourdonnement qui persiste longtemps après sa diffusion.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Découvrir la notion de limite
- ⇝ Interpréter une représentation graphjique en termes de limites
- ⇝ Interpréter graphiquement une limite en termes d'asymptote
- ⇝ Déterminer la limite d'une fonction simple

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 2:

LIMITES DE FONCTIONS

Le zéro absolu (-273,15 n^o C) est la température la plus basse que l'on puisse envisager. C'est une valeur limite, c'est-à-dire que l'on peut s'en approcher au plus près, mais qu'on ne l'atteindra jamais. Plus généralement, pour les fonctions définies sur un intervalle ouvert, il est important de déterminer de quelles valeurs, si elles existent, s'approchent les images lorsque la variable tend vers les bornes de cet intervalle.

I) Notion de limite

I.1. Asymptote horizontale

Travail de l'élève 1 : On considère un chauffe-eau de puissance 8 719 Watts dans lequel l'eau froide arrive à la température de 10n° C.
Le débit d'eau fourni est D en kg.s^{-1} et l'eau chaude sort à la température de Tn° C.
On montre en technologie que :

$$\mathrm{T} = 10 + \frac{8719}{4185\mathrm{D}}$$

PARTIE A : **Prise en main du problème**

A l'aide d'un tableau de valeurs « paramétré à la demande » sur la calculatrice, répondre aux questions suivantes :

1. A quelle température sort l'eau du chauffe-eau quand le débit est de 1 kg.s^{-1} ? de 5 kg.s^{-1} ? de 10 kg.s^{-1} ? de 100 kg.s^{-1} ?
2. Trouver une interprétation physique de ces résultats.
   Indication : Lorsque le débit est « grand », l'eau circulant dans le chauffe-eau a-t-elle le temps de beaucoup chauffer ?
3. A quelle température sort l'eau du chauffe-eau quand le débit est de 0.5 kg.s^{-1} ? de 0.1 kg.s^{-1} ? de 0.05 kg.s^{-1} . de 0.01 kg.s^{-1}.
4. Quel semble être le débit le plus adéquat parmi ceux proposés ci-dessus ?

PARTIE B : **Etude d'une fonction en mathématiques**

On note f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 10 + \dfrac{8719}{4185x}$

1. Etudier les variations de f.
2. Tracer à la calculatrice la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f.
   On prendra comme fenêtre graphique en abscisse $[0;10]$ et en ordonnée $[5;25]$
3. Une droite horizontale $\mathscr{D}$ semble servir de guide pour tracer la par de $\mathscr{C}$ correspondant aux grandes valeurs de l'abscisse x.
   Laquelle ?
4. Pour quelles valeurs de x l'écart vertical entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ est-il inférieur à 1ν ? à 0.1ν ?
5. Arrive-t-il que la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ soient confondues ?
   Expliquer physiquement ce phénomène.

PARTIE C : **Contraintes du problème**

1. L'eau, sous une pression atmosphérique normale, se vaporise à 100νC.
   Quel est le débit correspondant ? ESt-ce un débit minimum ou maximum nécessaire ?
2. Pour éviter aux usager de se brûler, on limite la température à 70νC .
   Quel est le débit correspondant ? Est-ce un débit minimum ou maximum ?

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et ℓ un nombre réel.
On dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à ℓ lorsque la distance entre $f(x)$ et ℓ est aussi petite que l'on veut dès que x est assez grand. On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

De même, on dit que la limite de f en $-\infty$ est égale à ℓ lorsque la distance entre $f(x)$ et ℓ est aussi petite que l'on veut dès que x est assez grand dans les négatifs. On note

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

Dans les deux cas, graphiquement la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f se rapproche autant que l'on veut (en $+\infty$, ie à droite ou en $-\infty$, ie à gauche) de la droite horizontale $\mathscr{D}$ d'équation $y = \ell$.
On dit que $\mathscr{D}$ est **asymptote horizontale** à la courbe $\mathscr{C}$.

Exemple :

Prendre la fonction inverse, puis une autre fonction rationnelle quelconque de limite finie.
Mettre des tableau de valeurs à côté.

Remarque : Ces définitions s'étendent évidemment aux cas où f est définie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$ ou $]-\infty;a[$

I.2. Asymptote verticale

Travail de l'élève 2 : On considère la fonction f définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$

1. Représenter la fonction f sur votre calculatrice en prenant pour fenêtre graphique $x \in [1;20]$ et $y \in [-1;20]$
2. De quelle droite horizontale se rapproche la courbe $\mathscr{C}$ lorsque x est assez grand ?
   Interpréter ce résultat en termes mathématiques de deux manières différentes.
3. De quelle droite verticale se rapproche la courbe $\mathscr{C}$ lorsque x est suffisamment proche de 1 ?
   Conjecturer l'interprétation de ce résultat en termes mathématiques de deux manières différentes.
4. Afficher désormais sur votre calculatrice la courbe $\mathscr{C}$ pour x allant de -5 à 5.
5. Critiquer votre conjecture et proposer une correction.

Définition 2.

Soit a un nombre réel, f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty;a[$ (respectivment $]a;+\infty[$).
On dit que la limite de f en a par valeur inférieure (resp. supérieure) est égale à $+\infty$ lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a par valeurs inférieures (resp. supérieures). On note

$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} f(x) = +\infty \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} f(x) = +\infty\right)$$

On possède des définitions analogues si $f(x)$ est suffisamment grand dans les négatifs.
Dans tous les cas, graphiquement la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f se rapproche autant que l'on veut (vers $+\infty$, ie en haut ou vers $-\infty$, ie en bas) de la droite verticale $\mathscr{D}$ d'équation $x = a$.
On dit que $\mathscr{D}$ est **asymptote verticale** à la courbe $\mathscr{C}$.

Exemple :

Prendre la fonction inverse, puis une autre fonction rationnelle quelconque de limite finie
Mettre des tableau de valeurs à côté.
Faire qq exos de lectures graphiques et traduction en termes math, et réciproquement type livre p 51-53-55.
Penser à le faire aussi à partir de tableau de variations et de valeurs.

I.3. Limites infinies en l'infinie

Travail de l'élève 3 : A l'aide d'un tableau de valeurs, dire si les fonctions suivantes admettent des asymptotes et si oui, lesquelles. Interpréter en termes de limites.

- La fonction carré
- La fonction cube
- La fonction racine carré
- La fonction inverse
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 1000$$

- La fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par

$$g(x) = \frac{-5x^2 + 10x + 1000}{2x - 6}$$

x	10	100	1000	10 000	...
x^2					...
x^3					...
$\sqrt{x}$					...
$\frac{1}{x}$					...
$f(x)$					...
$g(x)$					...

Définition 3.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Si lorsque x prend de grandes valeurs, alors il en est de même pour $f(x)$, on dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$ et on note

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Si lorsque x prend de grandes valeurs, alors $f(x)$ prend de grandes valeurs **dans les négatifs**, on dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$ et on note

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

On possède des définitions analogues quand x prend de grandes valeurs dans les négatifs et on note :

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

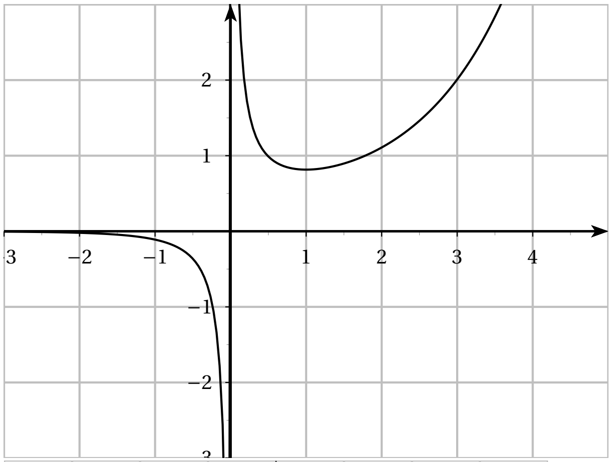
Dans tous les cas, graphiquement il n'y a ni asymptote hirzontale, ni asymptote verticale.

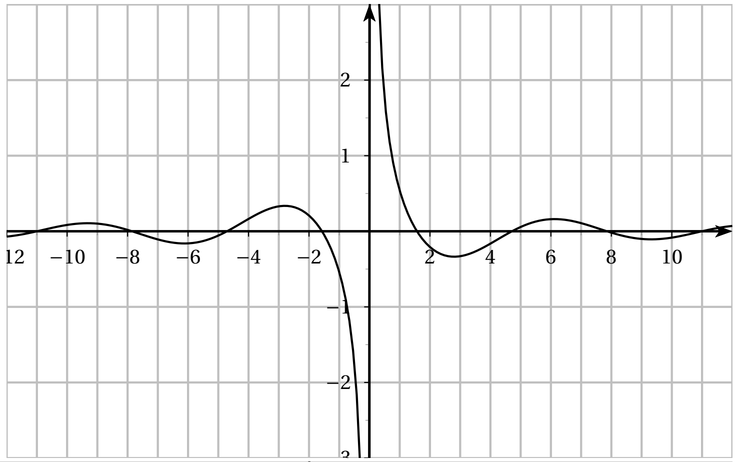
Exemple :

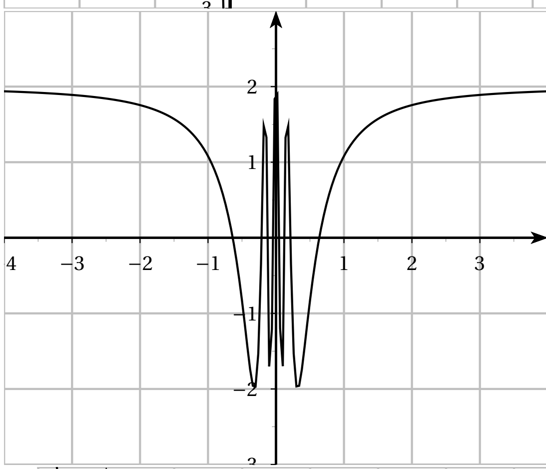
la fonction carré, la fonction f de l'activité.

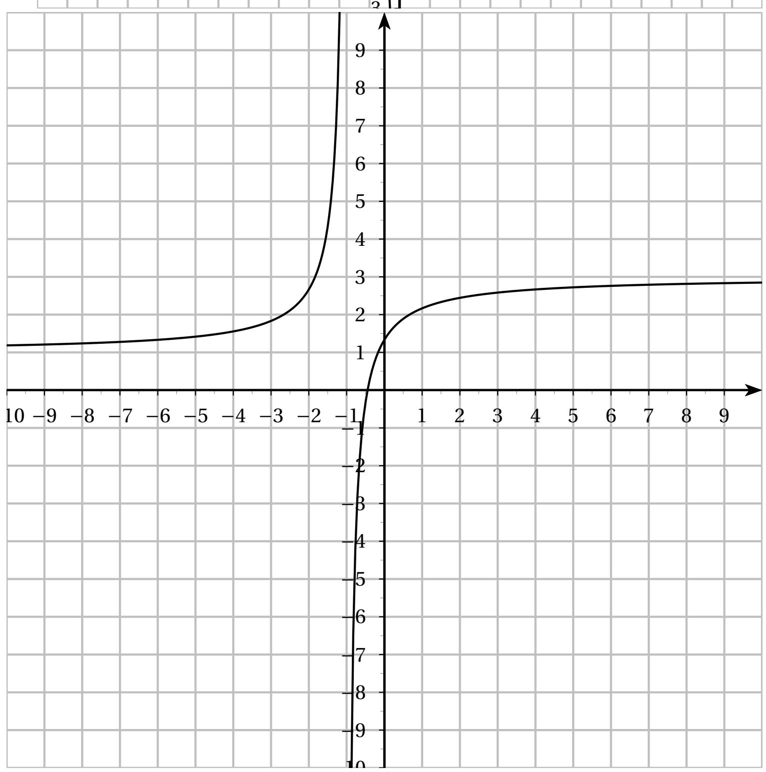
Exercice 1 : On donne les représentations graphiques de diverses fonctions. Dans chaque cas :

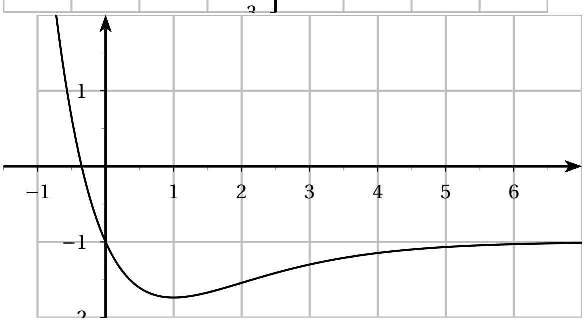
1. Lire graphiquement les équations des éventuelles asymptotes
2. En déduire les limites correspondantes
3. Dresser graphiquement le tableau de variations de la fonction représentée en y faisant figurer les limites trouvées.











Exercice 2 : On donne le tableau de variations d'une fonction f ci-contre.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Donner les équations des asymptotes à la courbe représentative de f.
3. Tracer ces asymptotes dans un repère, puis dessiner une courbe représentative possible pour f.

x	$-\infty$		-1		2	$+\infty$
Variations de f	4 ↘	$-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-0.5 ↘	-3

Exercice 3 : On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous mais il manque des informations.

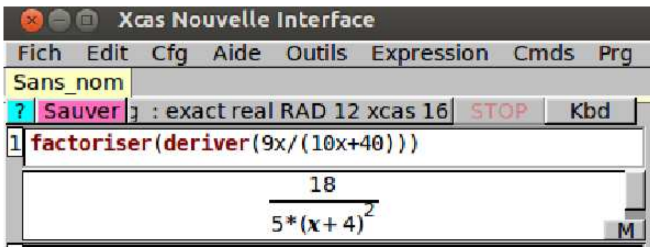
On sait également que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ admet la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = 1$ pour asymtptote ainsi que la droite $\mathscr{D}_2$ d'équation $x = 5$.

1. Placer ces deux dernières informations dans le tableau.
2. Quel est l'ensemble de définition de f ?
3. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle d'autres asymptotes que celles données ? Si oui, préciser leur équation.
4. Dessiner une courbe $\mathscr{C}$ compatible avec ce tableau.

x	$-\infty$		3			‖		$+\infty$
Variations de f	-2	↗	0	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	

Exercice 4 : Une entreprise souhaite promouvoir un nouveau produit : elle envisage alors de réaliser une campagne de publicité. Elle estime que la proportion de la population qui connait le nom du produit après x semaines de publicité est donnée par $P(x) = \dfrac{9x}{10x+40}$.

1. **Conjectures graphiques :**
   - **a.** Tracer à la calculatrice la représentation graphique de la fonction P.
   - **b.** Conjecturer les variations de P sur $[0;+\infty[$.



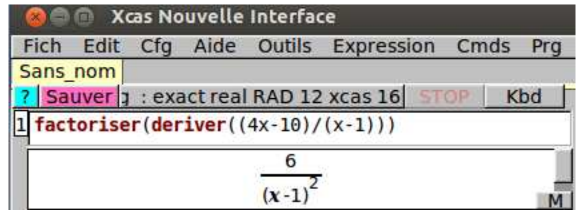
2. **Preuves par le calculs :**
   - **a.** En utilisant le résultat donné par Xcas, étudier le signe de P'.
   - **b.** En déduire les variations de la fonction P.
3. **Avec un tableau de valeurs :**
   - **a.** En utilisant un tableau de valeurs sur la calculatrice, déterminer le nombre d'années nécessaires pour que 80% de la population connaisse le nom du nouveau produit.
   - **b.** En procédant de la même façon, compléter le tableau suivant :

Proportion de la population qui connaît le nom du produit	85 %	88 %	89%	89,5%	89,9%	89,99%	89,999%	90%
Nb de semaines nécessaires pour dépasser cette proportion								

   - **c.** Quelle conjecture pouvez-vous faire ?
4. **Conclusion :**
   - **a.** Ajuster la fenêtre graphique de votre calculatrice pour observer ce résultat.
   - **b.** Rajouter cette information dans le tableau de variations de P établi à la question 2.

Exercice 5 : On considère la fonction f définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x-10}{x-1}$

1. **Conjectures graphiques :**
   - **a.** Tracer à la calculatrice la représentation graphique de la fonction f.
   - **b.** Par lecture graphique, dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
   - **c.** Quelle semble être la limite de f en $-\infty$? en $+\infty$? Justifier à l'aide d'une interprétation graphique.



2. **Preuves par le calculs :**
   - **a.** En utilisant le résultat donné par Xcas, étudier le signe de P'.
   - **b.** En déduire les variations de la fonction P.

3. **Avec un tableau de valeurs :**
   - **a.** On s'intéresse maintenant aux images par f juste avant sa valeur interdite 1.
     En utilisant un tableau de valeurs à la calculatrice, compléter le tableau ci-contre.

x	0.9	0.99	0.999	0.9999
$f(x)$				

   - **b.** Interpréter cela en termes de limite et rajouter cette information dans le tableau de variations établi à la question 2.
   - **c.** Que se passe-t-il graphiquement ?

4. **Avec un algorithme :** on donne l'algorithme suivant

Algorithme 1 :

Variables
  n est un nombre entier
  x et y sont des nombres réels
Début
  Pour n allant de 1 à 5 **Faire**
    x prend la valeur $1+10^{-n}$
    y prend la valeur $(4x-10)/(x-1)$
    Afficher y
  Fin Pour
Fin

   - **a.** Compléter la trace d'exécution ci-dessous.

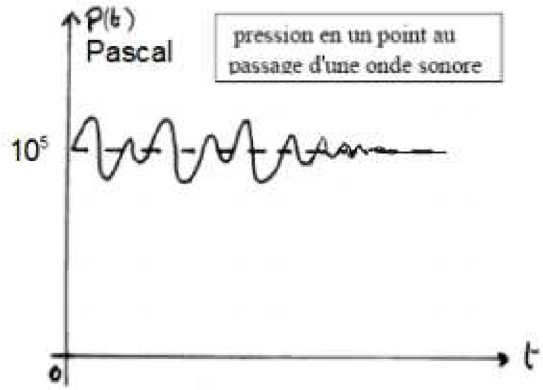
	n	x	y
1ère itération			
2ère itération			
3ère itération			
4ère itération			
5ère itération			

   - **b.** Interpréter en termes de limite et rajouter cette information dans le tableau de variations établi à la question 2.

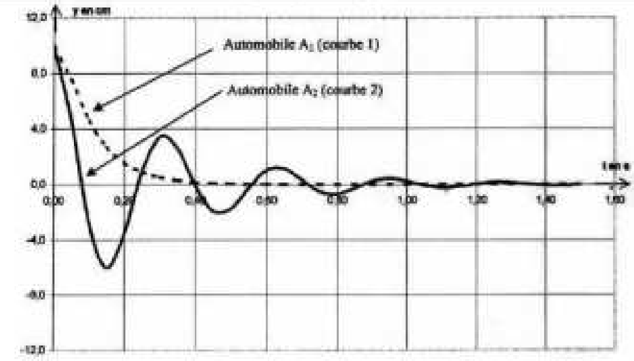
Exercice 6 : La fonction racine carré possède-t-elle une asymptote horizontale ?

Exercice 7 : Décrire les situations suivantes en termes de limites et d'asymptotes horizontales.

SITUATION 1



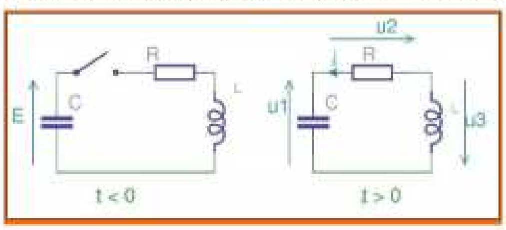
SITUATION 2



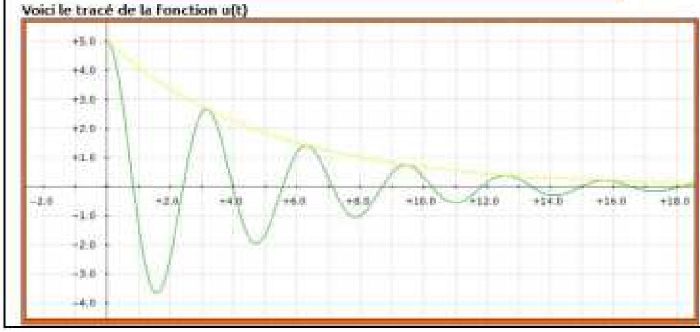
La figure présente les courbes y(t) des positions du centre d'inertie G du solide modélisant chaque automobile lors du passage sur une bosse.

SITUATION 3

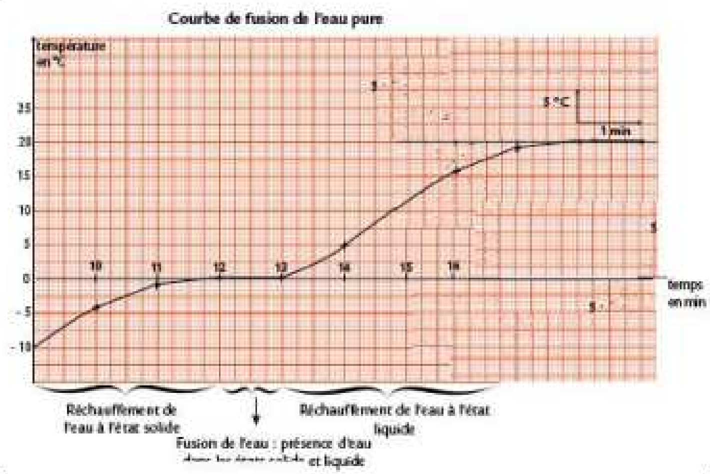
Tension au bord du condensateur dans un circuit RLC...



Voici le tracé de la fonction u(t)



SITUATION 4



I.4. Limites des fonctions de référence

Propriété 1.

On doit connaître par coeur l'allure des courbes suivantes et donc retenir les limites suivantes :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Théorème 1.

Plus généralement :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

Remarques :

- Les courbes représentatives de chacune sont un bon moyen pour retenir les limites.
- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ n'ont pas de limites quand x tend vers $\pm\infty$ et elles n'ont pas d'asymptotes verticales non plus.

II) Calculs de limites

Dans tout ce qui suit :

- $\rightsquigarrow$ u et v sont deux fonctions définies sur un même intervalle I
- $\rightsquigarrow$ α peut être remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$ ou un réel a.
- $\rightsquigarrow$ L et L' désignent deux nombres réels.

II.1. Produit d'une fonction par une constante $k \neq 0$: $\lim\limits_{x\to\alpha} k \times u(x)$

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	L	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to\alpha} k \times u(x) =$	$k \times \mathrm{L}$	Si $k>0$: $+\infty$ Si $k<0$: $-\infty$	Si $k>0$: $+\infty$ Si $k<0$: $+\infty$
		On suit la règle des signes	

Exemples :

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -3x^2 \quad ; \quad g(x) = -2x \quad \text{et} \quad h(x) = 4x^3 + 7$$

Dresser ensuite leur tableau de variations complet.

II.2. Somme de deux fonctions : $\lim\limits_{x\to\alpha}\big(u(x) + v(x)\big)$

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	L			$+\infty$		$-\infty$
Et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\big(u(x)+v(x)\big) =$	$\mathrm{L}+\mathrm{L}'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	$-\infty$

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 4x^2 - \dfrac{10}{x} + 3$.
   Déterminer si possible sa limite en $+\infty$ et en 0.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 5x$.
   Déterminer si possible sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 5x^2$.
   Déterminer si possible sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

II.3. Produit de deux fonctions : $\lim\limits_{x\to\alpha}\big(u(x)\times v(x)\big)$

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	L	$\mathrm{L}\neq 0$	0	$\pm\infty$
Et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\big(u(x)\times v(x)\big) =$	$\mathrm{L}\times\mathrm{L}'$	$\pm\infty$ en suivant la règle des signes	?	$\pm\infty$ en suivant la règle des signes

Exemples :

1. En utilisant les exemples précédents, compléter :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4x^2-\frac{10}{x}+3\right)(-3x^2)=\ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(4x^2-\frac{10}{x}+3\right)(-3x^2)=\ldots$$

2. **a.** Montrer que $x^3+5x^2=x^3\left(1+\dfrac{5}{x}\right)$.

b. En déduire la limite de x^3+5x^2 en $-\infty$

Théorème 2.

En l'infini, une fonction polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.

Remarques :

⇝ En effet, c'est le terme qui joue le rôle le plus important pour les grandes valeurs de x.

⇝ La démonstration de ce théorème vient de la généralisation de la méthode vue dans l'exemple ci-dessus.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^3+27x+1$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3. Etablir le tableau de variation complet de f. Pour cela :

a. Calculer de $f'(x)$

b. Résoudre $f'(x)=0$

c. Dresser un tableau avec le signe de $f'(x)$ puis les variations de f

II.4. Inverse d'une fonction : $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{u(x)}$

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	$\mathrm{L}\neq 0$	0	$\pm\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{u(x)} =$	$\dfrac{1}{\mathrm{L}}$	Si pour tout x proche de α on a : $\begin{cases} u(x)>0 & : +\infty \\ u(x)<0 & : -\infty \end{cases}$ ***On suit la règles des signes***	0

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
3. Déterminer $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}2} f(x)$
4. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?

Exercice 8 : Soit g la fonction définie sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$ par $g(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}} g(x)$
2. Déterminer $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}} g(x)$

II.5. Quotient de deux fonctions : $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{u(x)}{v(x)}$

On utilise le fait que

$$\frac{u(x)}{v(x)}=u(x)\times\frac{1}{v(x)}$$

Mais cette méthode n'est pas toujours concluante...

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0.5[\cup]0.5;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-5}{2x-1}$.

1. **Limites en** 0.5 :
   - **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0.5} 3x^2+4x-5$
   - **b.** Déterminer $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0.5} \dfrac{1}{2x-1}$
   - **c.** En déduire $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0.5} f(x)$
   - **d.** En utilisant la même méthode, déterminer $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0.5} f(x)$
   - **e.** Quelle(s) asymptote(s) peut-on en déduire ?
2. **Limites en l'infini** :
   - **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+4x-5$
   - **b.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x-1}$
   - **c.** Peut-on alors déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$? Pourquoi ?

Théorème 3.

En l'infini, une fonction rationnelle a la même limite que le quotient de ses termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Remarques :

- En effet, ce sont les termes qui jouent les rôles les plus importants pour les grandes valeurs de x.
- La démonstration de ce théorème utilise la même méthode que celle utilisée pour les sommes de fonctions polynômes : on factorise.

Attention !
Ce théorème ne permet pas d'obtenir la limite d'une fonction rationnelle en un **nombre réel** a où elle n'est pas définie.

Exemple :
Utiliser ce théorème pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+3x-5}{4x+12}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. Déterminer $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -3} f(x)$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -3} f(x)$
3. En déduire les éventuelles asymptotes verticales et horizontales à la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Exercice 10 : Soit g la fonction définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;1[\cup]1;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x^2+5}{x^2+2x-3}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
2. Déterminer $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} g(x)$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} g(x)$
3. Déterminer $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -3} g(x)$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -3} g(x)$
4. En déduire les éventuelles asymptotes verticales et horizontales à la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

Exercice 11 : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{5x-3}{x^2+3}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$
2. En déduire les éventuelles asymptotes verticales et horizontales à la courbe représentative de h dans un repère orthonormé.

II.6. Fonctions composées : u^n avec $n \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{u}$ avec $u > 0$

Travail de l'élève 4 : Soient u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -2x+5$ et $v(x) = 4x^2-5x+1$.

1. Déterminer les limites de u et v en $+\infty$ et en $-\infty$
2. On définit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \big(u(x)\big)^3 = (-2x+5)^3 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \big(v(x)\big)^{100} = (4x^2-5x+1)^{100}$$

   A votre avis, comment déterminer les limites de f et g en $+\infty$ et en $-\infty$?
3. On définit désormais les fonctions h et k par

$$h(x) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{-2x+5} \qquad \text{et} \qquad k(x) = \sqrt{v(x)} = \sqrt{4x^2-5x+1}$$

   a. Résoudre les inéquations $u(x) \geq 0$ et $v(x) \geq 0$
   b. En déduire les domaines de définition des fonctions f et g.
   c. A votre avis, comment déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$?

Théorème 4.

Ici α, β et c désignant des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \beta$ et $\lim\limits_{X\to\beta} X^n = c$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} u^n(x) = c$
De plus, si u est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ et

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \beta$ et $\lim\limits_{X\to\beta} \sqrt{X} = c$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \sqrt{u(x)} = c$

Plus généralement,
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \beta$ et $\lim\limits_{X\to\beta} f(X) = c$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f\big(u(x)\big) = c$

Exercice 12 : Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-\infty;-3[\cup]-3;0[\cup]0;+\infty[$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
Variations de f	-4	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

1. Indiquer pour chacune des affirmations suivantes si elles est vraie ou fausse. **Justifier.**

   a. L'axe des ordonnées est une asymptote de $\mathscr{C}$
   b. La courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes verticales
   c. La courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes horizontales
   d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$
   e. $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \big(f(x)\big)^4 = -\infty$
   f. L'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.

2. Dans un repère orthonormé,

   a. Tracer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
   b. Tracer ensuite dans ce repère une courbe $\mathscr{C}$ compatible avec les informations du tableau.

Exercice 13 :

1. Le module de l'impédance complexe d'un condensateur de capacité C traversé par un courant de fréquence x en régime variable est donné par $\mathrm{M}(x) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{C}x}$
   - **a.** Déterminer les limites de $\mathrm{M}(x)$ quand la fréquence x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.
   - **b.** On sait que le module de l'impédance d'un circuit fermé (court-circuit) est nul alors que le module de l'impédance d'un circuit ouvert (interrupteur ouvert) tend vers $+\infty$.
     D'après la question **a**, pour des fréquences très faibles, le comportement d'un condensateur se rapproche-t-il d'un circuit ouvert ou d'un circuit fermé ?
   - **c.** Reprendre la question **b** pour des fréquences très élevées.
2. Le module de l'impédance complexe d'une bobine d'inductance L traversée par un courant de fréquence x en régime variable est donné par $\mathrm{M}(x) = 2\pi \mathrm{L}x$.
   Reprendre la question **1** dans ce cas.