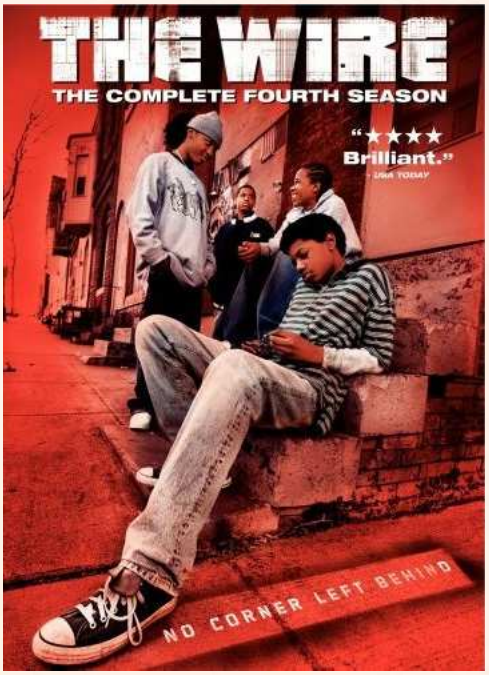
CHAPITRE 1

PARTONS À LA DÉRIVE

HORS SUJET



TITRE : « The Wire »
AUTEUR : DAVID SIMON
PRÉSENTATION SUCCINTE : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et Ed Burns.

Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.

Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.

Le tour de force de la série est de s'engager, sur le plan social, en montrant sans détour les pans les plus sombres du décor américain, son revers le plus inavouable, tout en mettant en scène une multitude de points de vue réalistes qui multiplient les questions dérangeantes sans jamais proposer de solution miracle. Il n'y a pas de fausse objectivité rassurante et pas de subjectivité accusatrice sous-jacente, l'épisode ne fait que montrer le plus passivement possible, il en résulte un étrange bourdonnement qui persiste longtemps après sa diffusion.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Connaître l'interprétation graphique d'un nombre dérivé
- ⇝ Connaître l'équation générale d'une tangente à une courbe en un point
- ⇝ Revoir les formules des dérivées
- ⇝ Découvrir la dérivée de u^n
- ⇝ Découvrir la notion de primitive

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 1:

PARTONS À LA DÉRIVE

Au fil du temps

En mathématiques, la dérivation élémentaire est le calcul permettant de définir une variation de phénomène par unité de temps ou par unité géométrique. La dérivée f' d'une fonction f en un point x_0 ne fait rien d'autre que d'indiquer la valeur de la pente de la fonction en ce point : par exemple, si la pente au point x_0, appelé nombre dérivé de f en x_0 et que l'on note $f'(x_0)$, est positive, alors c'est que la courbe de la fonction est orientée « vers le haut » en ce point (elle est croissante) et la valeur de $f'(x_0)$ indique si cette montée est plutôt douce ou forte. De même, si $f'(x_0)$ est négative, la courbe est « descendante » en ce point, et si $f'(x_0) = 0$, la courbe y connaît un répit horizontal. En bref, la fonction dérivée f' n'a pour rôle que de donner toutes les informations sur les variations de f ...
Pourtant, la découverte des fonctions dérivées ne se fit qu'au XVII^e et a été l'un des moments forts des mathématiques.
Ceci a obligé les mathématiciens à raisonner en termes de sommes infinies d'éléments « infiniment petits », pour lesquels il a fallu inventer des règles et des opérations. La dérivation a également été une extraordinaire découverte pour la Physique : la connaissance des variations d'une fonction s'est révélée essentielles à la description des phénomènes naturels car les théories physiques parlent avant tout des variations de la nature.

Il faut dire que, dès les premières décennies du XVII^e, l'étude des « courbes » géométriques, inaugurée par les Grecs anciens, s'est déjà transformée en l'étude de fonctions plus générales. C'est Blaise Pascal qui, le premier, mène des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Grâce aux travaux de Fermat, on sait également qu'une fonction (continue) change son mode de variation en passant par un point où sa tangente a une pente nulle, l'extremum, ce qui renseigne sur la forme géométrique de cette fonction. Mais l'ambition des mathématiciens du XVII^e siècle est bien plus générale : il s'agit pour eux de montrer qu'une fonction contient dans son expression mathématique toutes les informations sur ses tangentes et, inversement, que les informations données par les tangentes à une fonction inconnue doivent permettre de reconstruire celle-ci (ce qui équivaut à reconstruire un trajet en voiture à partir uniquement de ses variations de vitesse et de direction).
Mais cette intuition sur le lien entre la fonction et ses tangentes se heurte à un problème : le nombre de tangentes à une courbe est infini car chaque point à la sienne ! Comme les mathématiciens de l'époque ne savent pas raisonner avec l'infini, il leur parait impossible de calculer la pente exacte d'une tangente au point $(x; f(x))$, d'autant plus qu'au sens géométrique un point n'a pas de tangente !

Cependant, dès la seconde moitié du XVII^e siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connait une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral. La notion de nombre dérivée se retrouve pour la première fois dans leurs écrits, sous le nom « fluxion », et défini comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».
Entre 1660 et 1675, Leibniz et Newton découvrent, chacun de leur côté et indépendamment, une nouvelle mathématique qui permet de raisonner sur des segments « infiniment petits » d'une fonction f. L'idée essentielle est que si l'on considère des segments de plus en plus proche de sa courbe, alors leur tangente tend à se confondre avec le segment lui-même : du coup, sa pente se déduit directement de l'expression de la fonction f.
Néanmoins la théorie du calcul infinitésimal, tout juste éclose, n'est pas encore pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable.

Au XVIII^e siècle Lagrange utilise la notation $f'(x)$, aujourd'hui tout à fait usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x, tandis que d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : elle n'est pas encore construite formellement !
C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIX^e siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

I) Nombre dérivé et tangente

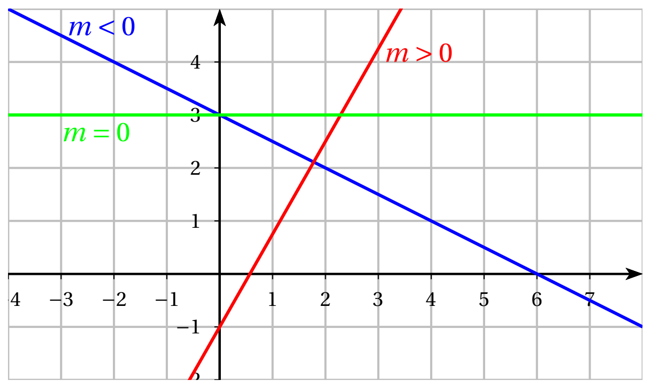
I.1. Equation réduite de droite

Propriété 1. (Définition)

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Son équation réduite est

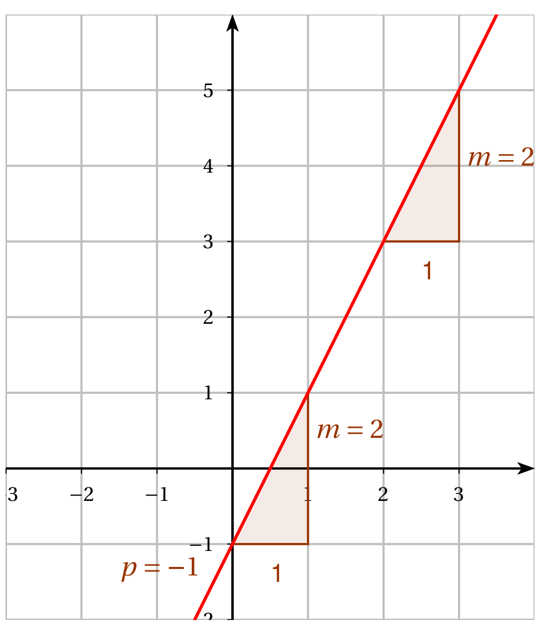
$$y = mx + p$$

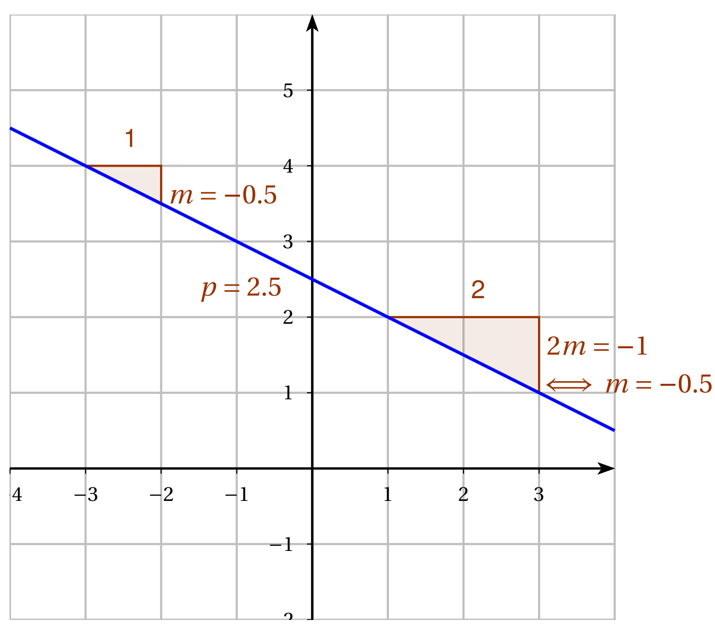
m est appelé le **coefficient directeur** et p l'**ordonnée à l'origine**.

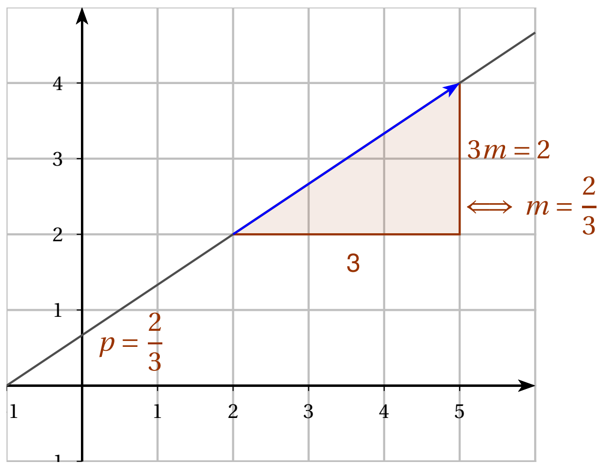


Interprétation graphique

Comme le dit son nom, le coefficient directeur donne la direction de la droite. Ainsi, il s'agit de la valeur du « déplacement » en ordonnée correspondant à un « déplacement » en abscisse de $+1$ unité.
L'ordonnée à l'origine correspond à l'ordonnée du point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées.



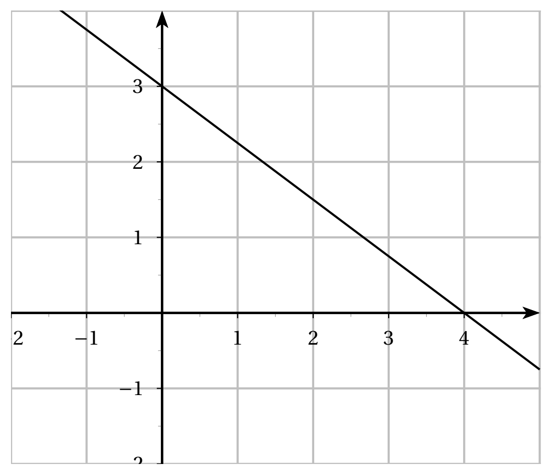




Remarque : Notons que les déplacements en abscisse et en ordonnée sont proportionnels. Ainsi, si l'on se déplace de $+2$ unités en abscisse, on se déplacera de deux fois le coefficient directeur en ordonnée, et ce, peu importe l'endroit d'où l'on part.
On peut également constater que si l'on choisit un vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(a, b)$ de la droite (n'importe lequel) alors

$$m = \frac{b}{a}$$

Exemple :
Déterminer l'expression de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ représentée ci-contre.



I.2. Coefficient directeur d'une tangente

Equation de tangente

Soit f une fonction dérivable en un réel a.

Le nombre $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

Cette tangente a pour équation :

$$\mathrm{T}_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemples :

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous.

En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.

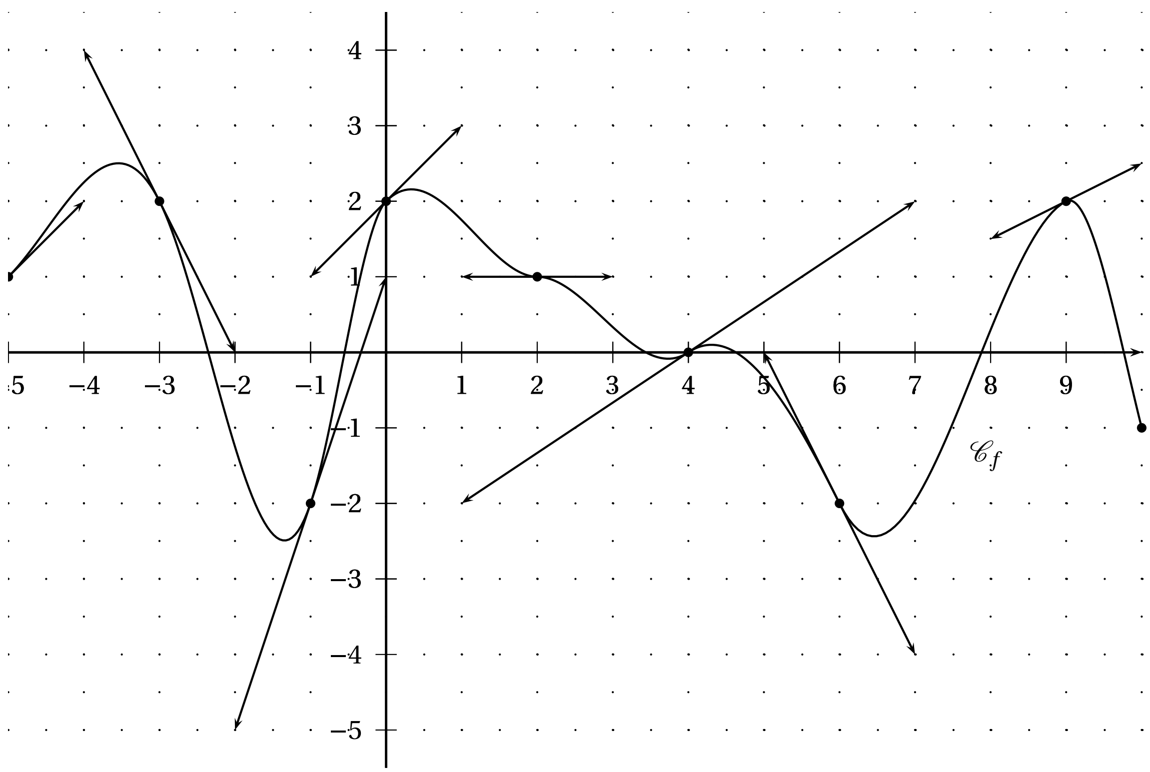
En vous servant du quadrillage :

1. Lisez les nombres suivants :

$$f(-5) \quad f(0) \quad f(-1) \quad f(4) \quad f(2) \quad f(-3) \quad f(9) \quad f(6)$$

$$f'(-1) \quad f'(0) \quad f'(2) \quad f'(-5) \quad f'(-3) \quad f'(9) \quad f'(6) \quad f'(4)$$

2. Retrouvez les équations de chacune des tangentes tracées.



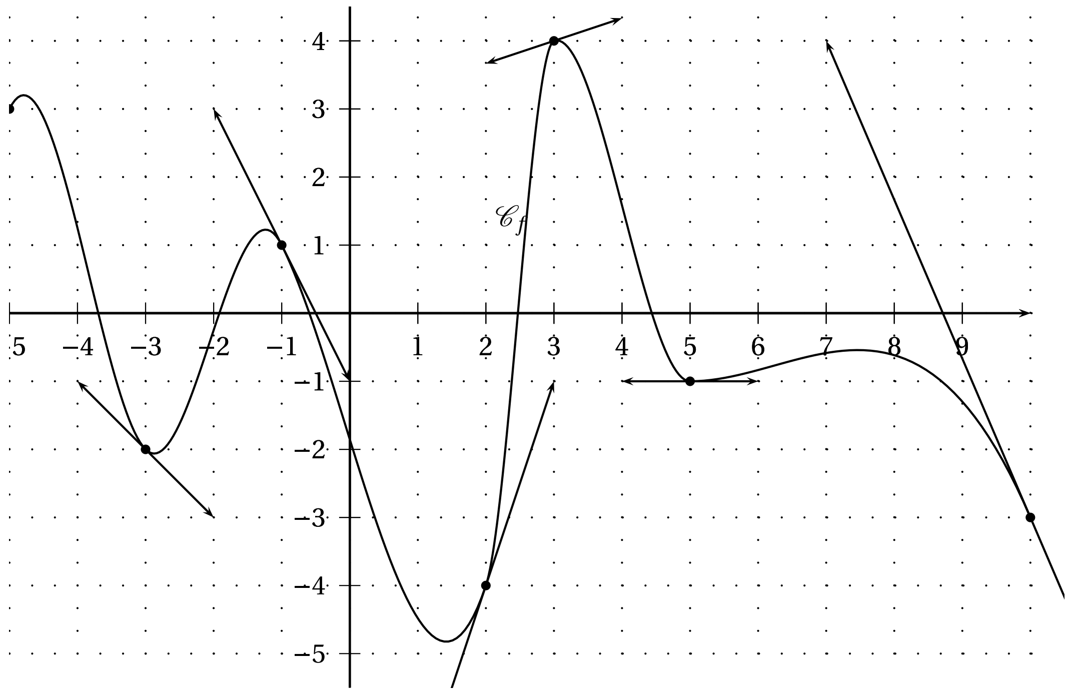
Exercice 1 : La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous.
En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée. En vous servant du quadrillage :

1. Lisez les nombres suivants :

$$f(-1) \qquad f(3) \qquad f(2) \qquad f(-3) \qquad f(10) \qquad f(5)$$

$$f'(2) \qquad f'(-1) \qquad f'(-3) \qquad f'(10) \qquad f'(5) \qquad f'(3)$$

2. Retrouvez les équations de chacune des tangentes tracées.



II) Fonction dérivée

II.1. Calculs

Formules

Dérivée des fonctions de référence :

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
k (nombre fixé)	0	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$ (fonction puissance)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n > 0$, $\mathbb{R}^*$ sinon
$\frac{1}{x}$ (fonction inverse)	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\cos x$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Composée de fonctions :

Soient u et v deux **fonctions** dérivables sur un intervalle I et k, ω et ϕ des nombres réels.
Les fonctions ci-dessous sont dérivables sur I et on a :

- $(ku)' = ku' \quad (k \in \mathbb{R})$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u \times v)' = u'v + vu'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}^*)$
  avec $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ si $n < 0$
- $\left(\cos(\omega t + \phi)\right)' = -\omega\sin(\omega t + \phi)$
- $\left(\sin(\omega t + \phi)\right)' = \omega\cos(\omega t + \phi)$

Remarque : $\frac{1}{u} = u^{-n}$

Exemples :

Dans chacun des cas suivants, dériver les fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

- $f(x) = 2x^5 + \frac{1}{x} + \cos(3x+4) - 5$ sur $]0;+\infty[$
- $f(x) = x\cos(x) + 1$ sur $\mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{3x+2}{4-2x}$ sur $]2;+\infty[$
- $f(x) = \left(5x^2 - 6x - 4\right)^8$ sur $\mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ sur $]1;+\infty[$
- $f(x) = \left(\sin(-3x+2)\right)^5$ sur $]2;+\infty[$

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 3 :

1. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \sin(4x)$ au point d'abscisse 0.
2. Vérifier votre résultat graphiquement sur votre calculatrice.

Exercice 4 : Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer leur fonction dérivée (on ne demande pas le domaine de dérivabilité) :

$$f : x \longmapsto (2x+3)\cos x \qquad f : x \longmapsto (3\sin(x)+1)^4 \qquad f : x \longmapsto (5x^4-4x+1)\times\frac{1}{x}$$

$$f : x \longmapsto \frac{1}{9}-\frac{1}{x^3} \qquad f : x \longmapsto \frac{x^2+5x-2}{x^7-4} \qquad f : x \longmapsto \frac{x^2-x+7}{5} \qquad f : x \longmapsto \frac{\cos(-3x+1)}{2x+5}$$

$$f : x \longmapsto \left(x^2+3x-1\right)^3 \qquad f : x \longmapsto 4(2x^2-3)^7 \qquad f : x \longmapsto \frac{1}{(4x-5)^3} \qquad f : x \longmapsto \frac{3}{(x^2+4)^5}$$

II.2. Sens de variation

Théorème 1.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- f est strictement croissante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$
- f est constante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$
- f est strictement décroissante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$

Remarque : On comprend facilement ce théorème en interprétant le nombre dérivée d'une fonction en un point comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de cette fonction en ce point.
La démonstration formelle utilise des notions non au programme.

Exemple :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{-3x^2+2x-1}$$

1. Déterminer le domaine de définition de fonction f.
2. Montrer que

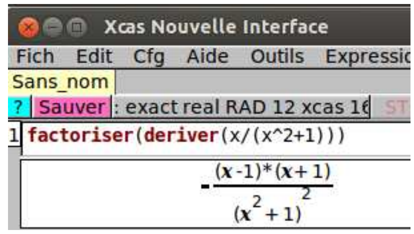
$$f'(x) = \frac{2\left(x^2-4x-1\right)}{\left(-3x^2+2x-1\right)^2}$$

   a. Etablir le tableau de signes de f'.
   b. En déduire les tableaux de variations de f.
   c. Préciser les éventuels extrema locaux de f.

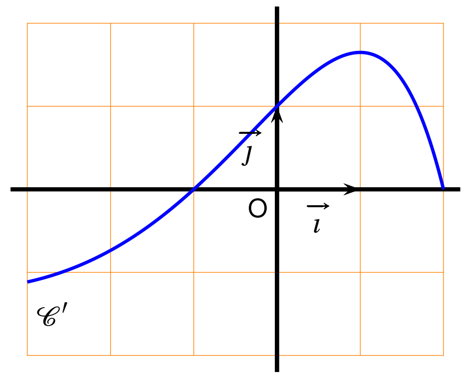
Exercice 5 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

1. A l'aide de la calculatrice,
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction f
   b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'.

2. A l'aide du résultat donner par Xcas,
   a. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$
   b. En déduire le tableau de variation de f.
   c. Préciser les extrema locaux de f.
3. Vérifier la cohérence de vos résultats.



Exercice 6 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 2]$ dont la courbe $\mathscr{C}'$ de la fonction **dérivée** f' est représentée ci-contre.



1. Dresser graphiquement le tableau de signes de $f'(x)$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. On sait de plus que $f(0) = -1$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 2]$ a-t-on $f(x) \geqslant -1$?
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Cette tangente passe-t-elle par le point de coordonnées $(3 ; 1)$? Par celui de coordonnées $(1 ; 0)$?

Exercice(s) du livre : Exos De Fabrice sur boulet de canon et table oscillante (graphiquement).
Nathan (Intervalle) : n° 60 p 88 (circuit électrique) en donnant la dérivée sur Xcas.

III) Vers les primitives

Travail de l'élève 1 : On modélise la course d'un sprinter de 100 mètres à l'aide des informations suivantes :

- le sprinter jaillit des starting-blocks avec une vitesse initiale de $4,5$ m.s^{-1}
- son accélération est constante, de $1,4$ m.s^{-2}, pendant les 6 premières secondes de la course
- au bout de 6 secondes, le sprinter a atteint sa vitesse maximale, qui reste constante, et il garde la même allure jusqu'à l'arrivée, c'est-à-dire pour tout $t \geq 6$

Dans toute la suite, on appelle

- a la fonction qui au temps t associe l'accélération à l'instant t,
- v la fonction qui au temps t associe la vitesse à l'instant t,
- d la fonction qui au temps t associe la distance parcourue à l'instant t,

PARTIE A : **Phase d'accélération**

Dans cette partie, on s'intéresse aux 6 premières secondes de course : $t \in [0;6]$.

1. D'après l'énoncé donner l'expression $a(t)$ pour tout $t \in [0;6]$
2. On rappelle que pour tout t, on a $a(t) = v'(t)$.
   *On dit alors que la fonction v est une **primitive** de la fonction a.*
   a. Donner une fonction v possible.
   b. Donner une autre fonction v possible.
   c. Combien y a-t-il de telles fonctions possibles ? Donner leur forme générale.
   d. Que vaut $v(0)$? En déduire l'expression $v(t)$ correspondant au contexte de l'activité.

3. On rappelle que pour tout t on a $v(t) = d'(t)$.
*On dit alors que la fonction v est une **primitive** de la fonction a.*
   a. Donner une fonction d possible.
   b. Donner une autre fonction d possible.
   c. Combien y a-t-il de telles fonctions possibles ? Donner leur forme générale.
   d. En utilisant la valeur de $d(0)$, donner l'expression de $d(t)$ correspondant au contexte de l'activité.
4. Déduire des résultats précédents :
   a. la vitesse atteinte par le sprinter au temps $t = 6$, notée $v(6)$
   b. la distance parcourue par le sprinter au temps $t = 6$, notée $d(6)$

PARTIE B : **Fin de course**

Pour $t \geq 6$, la vitesse est constante et égale à $v(6)$

1. En suivant la même démarche que précédemment, montrer que pour tout $t \geq 6$ on a

$$d(t) = 12,9t - 25,2$$

2. A quel instant t le sprinter franchit-il la ligne d'arrivée ? Arrondir le résultat au centième.

Conclusion

La fonction a est LA dérivée de la fonction v ; la fonction v est UNE primitve de la fonction a.
Les conditions initiales donne l'unicité de la primitive. La fonction v est LA dérivée de la fonction d ; la fonction d est UNE primitve de la fonction v.
Les conditions initiales donne l'unicité de la primitive.

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dont la dérivée sur I est f.
Ainsi F est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a

$$\mathrm{F}'(x) = f(x)$$

Exemples :

- $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x^2 - 5$ sont des primitives de $x \longmapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.
- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + \cos x$
  Déterminons (mentalement) une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
  La fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \sin x$ convient.
  En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction F est dérivable (comme somme de fonctions qui le sont) et

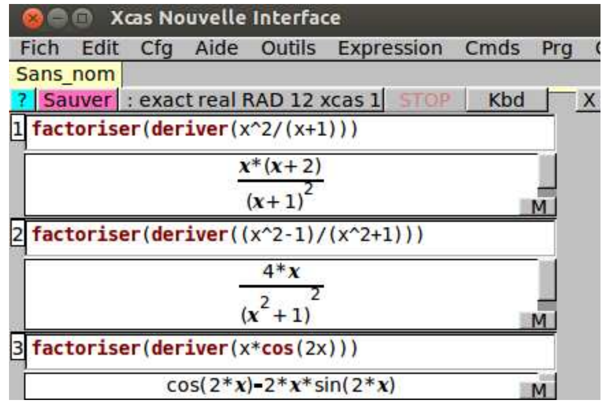
$$\mathrm{F}'(x) = \frac{3x^2}{3} - 2x + \cos x = f(x)$$

  Remarquons que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \sin x + 12$ convient aussi puisque la dérivée d'une constante est nulle.

Remarque : Si f admet une primitive sur I, alors elle en admet une infinité.

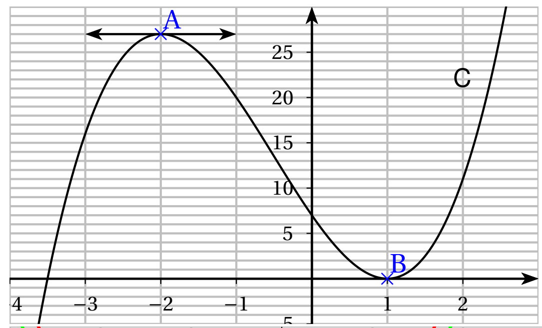
Exercice 7 : Soit les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$ et $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{5x^3}{3} + x - 7$.
Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 :



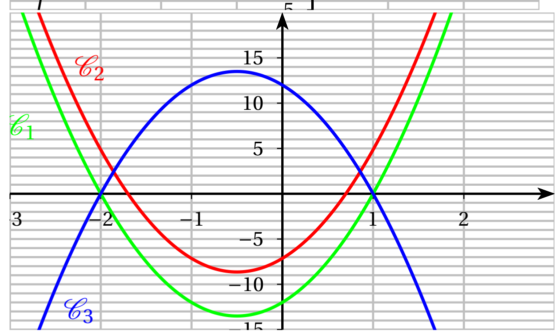
1. Indiquer en justifiant la réponse, si la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I
   a. $\mathrm{F}(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ et $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ $(\mathrm{I}=]-1;+\infty[)$
   b. $\mathrm{F}(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ et $f(x)=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$ $(\mathrm{I}=\mathbb{R})$
   c. $\mathrm{F}(x)=x\cos(2x)$ et $f(x)=\cos(2x)+2x\sin(2x)$ $(\mathrm{I}=\mathbb{R})$
2. Vérifier vos réponses à l'aide des résultats proposés par Xcas ci-dessous

Exercice 9 : La courbe C ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction F définie sur $[-3;2]$.
Cette courbe admet deux tangentes horizontales aux points $\mathrm{A}(1,0)$ et $\mathrm{B}(-2;27)$.

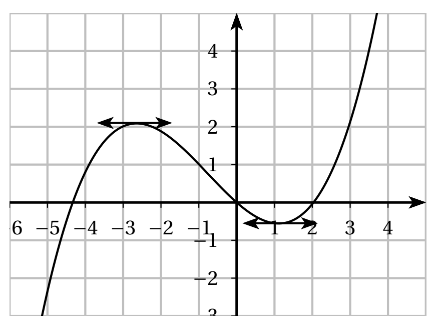


1. **a.** Déterminer $\mathrm{F}(-2)$.
   b. Déterminer $\mathrm{F}'(-2)$. Justifier.
   c. Dresser le tableau de variation de F en y incluant une ligne pour le signe de F'.
2. La fonction F est une primitive d'une fonction f sur $[-3;2]$.
   a. Compléter : pour tout $x\in[-3;2]$ on a $\mathrm{F}'(x)=\ldots$
   b. Déduire alors de la question 1 :
   - ⇝ la valeur de $f(-2)$
   - ⇝ le tableau de signes de f

   c. Parmi les trois courbes ci-dessous se trouve la courbe représentative de f.
   Laquelle est-ce ? Justifier.



Exercice 10 : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est tracée ci-contre.
On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
En vous aidant du graphique, compléter les tableaux ci-dessous.



x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

x	
Signe de $\mathrm{F}'(x)$	
Variations de F	