EXERCICES : DÉRIVATION

I. Taux de variaiton et nombre dérivé

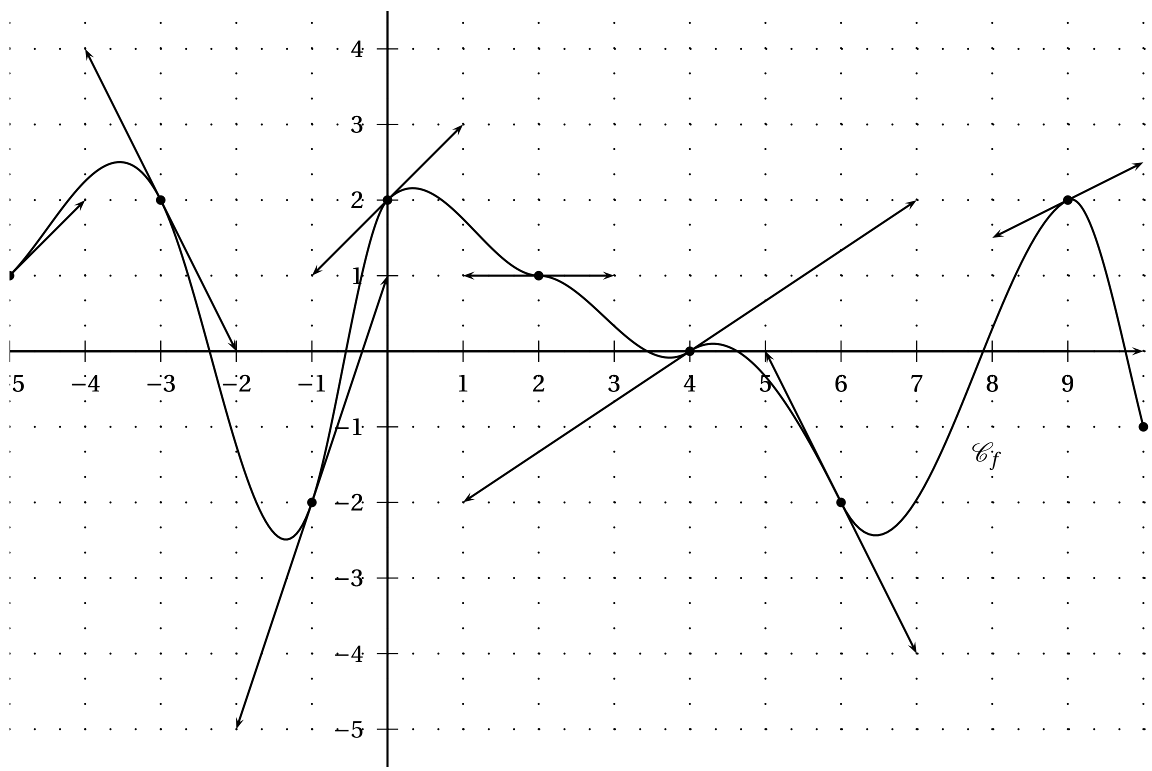
Exercice 1. Quel est le nombre dérivé de la fonction f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = -2x+3$ et $a = 3$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = -1$
3. $f(x) = mx + p$ et $a = 2$ avec m et p deux réels
4. $f(x) = x^2 - 5x + 3$ et $a = 2$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $a = 0$
6. $f(x) = x^3 + 1$ et $a = 3$

II. Equation de la tangente

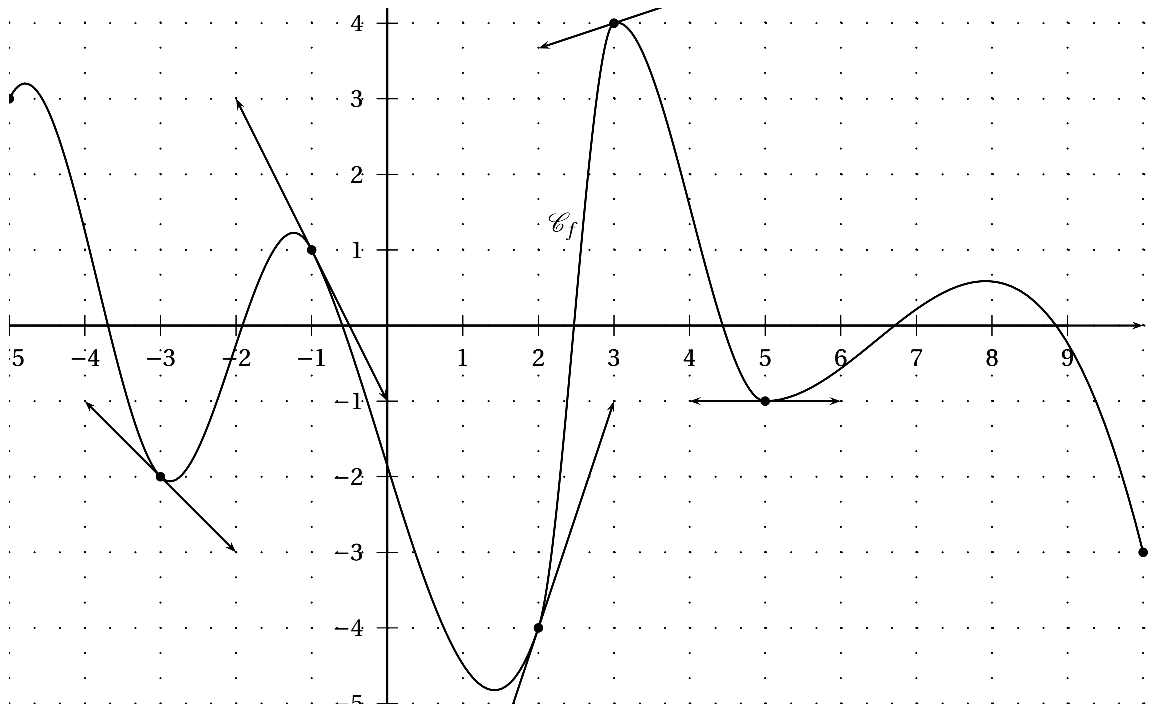
Exercice 2. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$f'(-5)$ $f'(-3)$ $f'(-1)$ $f'(0)$ $f'(2)$ $f'(4)$ $f'(6)$ $f'(9)$



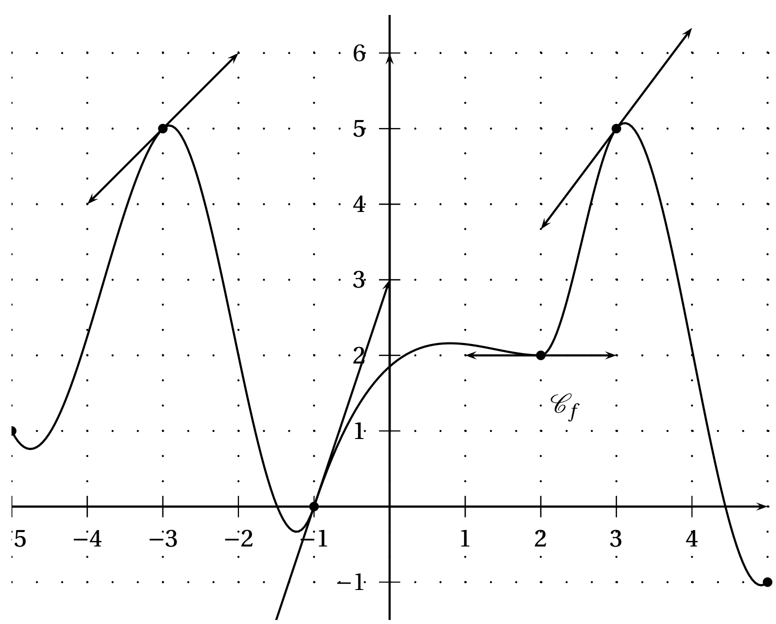
Exercice 3. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$f'(-3)$ $f'(-1)$ $f'(2)$ $f'(3)$ $f'(5)$



Exercice 4. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres dérivés :

$$f'(-3) \qquad f'(-1) \qquad f'(2) \qquad f'(3)$$



Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$

1. Vérifier que, pour $h>0$, on a :
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$$
2. En déduire l'existence et la valeur de $f'(1)$.

III. Entraînons nous à dériver

Exercice 6. Dériver les fonctions définies ci-dessous :

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
3. $h(x) = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$
4. $k(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$

Exercice 7. Dériver les fonctions définies ci-dessous :

1. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
2. $g(x) = (2x+3)(3x-7)$
3. $h(x) = \dfrac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \dfrac{1}{3}$
4. $k(x) = (2x^2+3x+1)^5$
5. $j(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
6. $p(x) = \sin 3x$

IV. Etude de fonction

Exercice 8.

1. (a) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \sin x$ au point d'abscisse 0
   (b) Tracer T et $\mathscr{C}$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. En déduire l'approximation affine locale de $\sin h$
3. A l'aide du 2., donner une approximation de $\sin 0,01$ et comparer avec la valeur fournie par votre calculatrice.

Exercice 9. On définit sur $[0;\pi]$ les fonctions f_1 et f_2 par :

$$f_1(x) = \sin x \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = \cos x$$

Démontrer que leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ admettent au point d'abscisse $\dfrac{3\pi}{4}$ des tangentes parallèles

Exercice 10. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
On considère également la fonction g définie par $g(x) = 3 - x$. On note $\mathscr{D}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f et en déduire les variations de f
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$
3. Résoudre, par calcul, l'équation $g(x) = f(x)$
4. Préciser les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$
5. Tracer sur un même repère les droites T, $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}_f$ en B

4. Tracer sur un même repère T_A, T_B et C_f

Exercice 12. On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = x^3 - 3x$$

1. Etude de f
   (a) Calculer la dérivée f' de f
   (b) Etudier le signe de la dérivée f'
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f
2. Etude de g
   (a) Calculer la dérivée g' de g
   (b) Etudier le signe de la dérivée g'
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction g
3. Comparaison des deux fonctions
   (a) Graphiques
      i. Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (on se limitera à l'intervalle $[-2;2]$ et on prendra un pas de $0,5$)
      ii. A l'aide du graphique, essayer de répondre aux questions suivantes :
         A. Combien y a-t-il de points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?
         B. Quelles sont leurs coordonnées ?
   (b) Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par calcul :
      i. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$
      ii. En déduire, par calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

Exercice 13. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

1. Démontrer que f est une fonction impaire
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f
3. Quel est le signe du dénominateur de $f'(x)$?
4. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum
6. Tracer (soigneusement) la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4;4]$

Exercice 14.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$

Exercice 15. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0
4. Tracer T et $\mathscr{C}_f$ (dans un même repère)
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;3]$.
6. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près

Exercice 16. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x + 1$$

1. Déterminer l'approximation affine locale de $f(-1+h)$
2. Démontrer que, si $h \neq 0$ est tel que $|h| < 1$, alors
$$|h^3| < h^2$$
3. En déduire que, si h est non nul et $|h| < 1$, alors :
$$|f(-1+h) - (5h-2)| < 4h^2$$
4. Que peut-on dire lorsque l'on remplace $f(-1+h)$ par son approximation affine locale ?

Exercice 17. On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\dfrac{3}{4}$ cm^2
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de l
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

Exercice 18. Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{2005} - 1}{h}$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^{2005}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Puis calculer $f'(0)$
2. Calculer le taux de variation de la fonction f entre 0 et h.
3. Conclure

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0
2. Tracer (dans un même repère) $\mathscr{C}_f$ et cette tangente sur l'intervalle $[-1;1,5]$

Exercice 19. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x}$

1. Calculer la dérivée f' puis étudier son signe
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f
3. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur $[-4;0[\cup]0;4]$

Exercice 20. Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer $f(x)$

2. Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.
3. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

4. Déduire de la question 3. que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on précisera une équation.

Exercice 21. Question préliminaire : factoriser le polynôme $\mathrm{P}(x) = x^2 + 2x - 3$
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^3 - 3x + 1$$

1. Etudier la partié des fonctions f et g
2. Etudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f et g
3. Calculer les dérivées f' et g'. Etudier leur signe.
4. Dresser les tableaux de variation des fonctions f et g
5. Tracer les représentation graphique $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;3]$).
6. Résoudre, par calcul, l'inéquation $f(x) \leq g(x)$. (On pourra utiliser la question préliminaire)

Exercice 22. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$$

1. Etudier les limites de la fonction f en $-\infty$, $+\infty$, 2^- et 2^+.
   Préciser les éventuelles asymptotes horizontales et verticales.
2. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f
4. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ
   (a) Déterminer trois réels, a, b et c tels que :

   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

   (b) En déduire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 23. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$
2. Vérifier que $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{x}$
3. Etudier la limite de f quand x tend vers 0. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote $\mathscr{D}$ dont on précisera une équation.
4. Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$
5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-3)]$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ dont on précisera l'équation et étudier la position de Δ et $\mathscr{C}_f$
6. Calculer la dérivée f' de f et montrer que l'on a : $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-1}{x^2}$
7. Etudier le signe de f' puis en déduire le tableau des variations de f

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$

1. Calculer la dérivée f' et étudier son signe
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f

Exercice 24. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x+1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unités : 1 cm par axe)

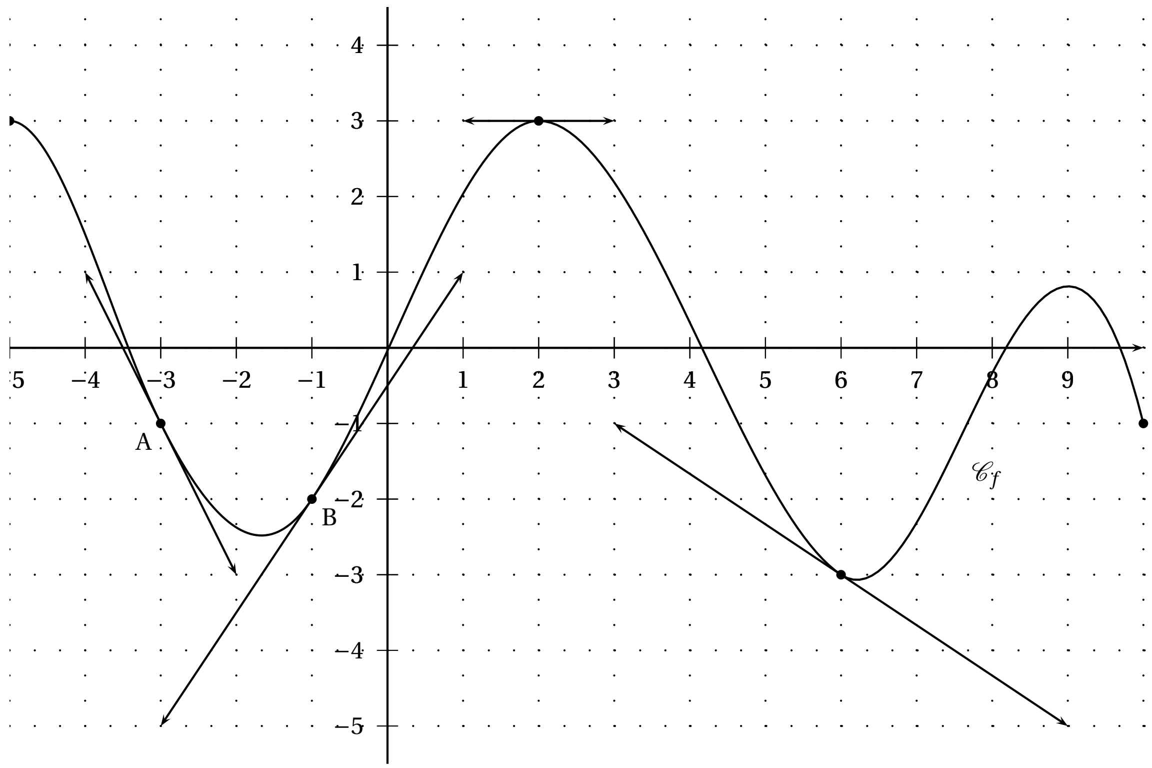
1. Calculer $f(0)$. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
3. Déterminer les réels a, b et c tels que :
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} - -1$$
4. Etudier les limites de f en -1^+ et en -1^-. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale $\mathscr{D}$ dont on précisera l'équation.
5. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ?
6. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de Δ
7. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe. En déduire le tableau de variation de f.
8. Déterminer une équation des tangentes T_{-2} et T_{-3} aux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives -2 et -3.
9. Tracer, dans le repère, $\mathscr{D}$, Δ, T_{-2}, T_{-3} et $\mathscr{C}_f$. (On se limitera à $[-10; -1[\cup]-1; 6]$)

Exercice 25. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$
Etudier la dérivabilité de f en 0

Exercice 26. Une parabole P admet, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une équation du type :
$$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$
Déterminer les coefficients a, b et c sachant que P coupe l'axe des abscisses $(O; \vec{i})$ au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées $(O; \vec{j})$ au point B d'ordonnée 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x + 2$ pour tangente.
Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de P avec $(O; \vec{i})$

V. Exemple de devoir

Exercice 27. La représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}$ admet une tangente qui est tracée ci-dessous.



1. Rappeler l'interprétation graphique du nombre $f'(-3)$.
2. Lire, en se servant du quadrillage, les nombres dérivés suivants :

$$f'(-3) \qquad f'(-1) \qquad f'(2) \qquad f'(6)$$

3. Donner graphiquement l'équation de la tangente T_A à $\mathscr{C}$, en $A(-3;-1)$.
4. Trouver par le calcul l'équation de la tangente T_B à $\mathscr{C}$, en $B(-1;-2)$. *On pécisera la formule à utiliser*
5. Etablir graphiquement le tableau de signes de la fonction f'.

Exercice 28. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
- f est monotone sur l'intervalle $[-3;+\infty[$,
- et on a les valeurs suivantes :

$$f(-7)=-6 \qquad f(-3)=1 \qquad f(0)=-2 \qquad f(2)=-3 \qquad \text{et} \qquad f(5)=-5$$

$$f'(-7)=4 \qquad f'(-3)=0 \qquad f'(0)=-1 \qquad f'(2)=0 \qquad \text{et} \qquad f'(5)=-3$$

Tracer dans un repère orthonormé une représentation graphique possible de la fonction f sur $]-8:6[$.
Unité graphique : 1 cm.

Exercice 29. Dériver les fonctions suivantes sur I :
Inutile de simplifier les écritures obtenues, mais il faut détailler les calculs :

1. $i(x)=\left(x^5-\dfrac{1}{x}+1\right)\left(\dfrac{x^7}{3}-5\sqrt{x}+100\right)$ sur $I=\mathbb{R}$

2. $j(x) = \left(-5x^4+1\right)^9$ sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

3. $k(x) = \dfrac{2}{(4x-1)^3}$ sur $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{4};+\infty\right[$

Exercice 30. [

3 points] Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$ de courbe représentative $\mathscr{C}$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction h.
2. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 31. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathrm{I} =]-4;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3-2}{x+4} \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2(x^3+6x^2+1)$$

1. Calculer la dérivée de f sur I.
2. (a) Etudier les variations de g sur I.
   (b) En déduire le signe de g sur I.
3. (a) Utiliser ce qui précède pour établir le tableau de variations de f sur I.

Exercice 32. Soit g_1 la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$g_1(x) = \frac{-1}{x+2}$$

et g_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_2(x) = x^2 + 3x + 1$$

1. Démontrer l'égalité suivante :
$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = (x+1)^2(x+3)$$
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B des courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{P}$, représentatives respectivement des fonctions g_1 et g_2.
   On appellera A *le point d'abscisse la plus petite.*
3. Démontrer alors que les courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{P}$ admettent une tangente commune en leur point d'intersection.
4. Donner une équation de cette tangente.