EXERCICES : LOI BINOMIALE

I. Loi binomiale

Exercice 1. Cinq amis se sont inscrits sur internet à un tirage au sort pour recevoir gratuitement un magazine. La probabilité p d'être choisi est $0,32$. Pour chaque réponse, on donnera d'abord la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-4} près.

On note X la variable aléatoire qui donne le donne d'amis qui reçoivent le magazine.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ; préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité P_1 que les cinq amis reçoivent le magazine ?
3. Quelle est la probabilité P_2 qu'au moins un des cinq ne reçoive pas le magazine ?
4. Quelle est la probabilité P_3 qu'au moins un des cinq reçoive le magazine ?
5. Quelle est la probabilité P_4 qu'exactement trois des amis reçoivent le magazine ?

Exercice 2.

Dans le métro, il y a 9% des voyageurs qui fraudent. Chaque jour, à la station alésia, on contrôle 200 personnes.
Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de fraudeurs sur ces 200 personnes. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Déterminer les paramètres de la loi que suit X.
2. Combien de personnes, en moyenne, vont être signalées en fraude lors de ce contrôle ?
3. Si le prix du ticket est de $1,70$ €, quel doit-être le prix de l'amende pour, qu'en moyenne, l'établissement régissant le métro ne perde pas d'argent avec les fraudeurs de la station Alésia, sachant qu'il y a 5000 voyageurs chaque jour dans cette station.

Exercice 3.

On a observé le nombre d'accidents de scooters à un carrefour dangereux.
Pour n scooters franchissant le carrefour durant une journée, on admet que la variable aléatoire S qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant la journée suit une loi binomiale telle que $E(S) = 0,1$.

1. Calculer la probabilité p (en fonction de n) d'être accidenté pour un scooter franchissant le carrefour pendant la journée considérée.
2. Pour tout entier naturel k, $0 \leq k \leq n$, exprimer la probabilité de l'événement $(S = k)$ en fonction de n et de k.
3. **Application** : Sachant que 100 scooters ont franchit le carrefour lors d'une journée de printemps, quelle est la probabilité :
   (a) qu'aucun scooter n'ait été accidenté.
   (b) que moins de deux scooters n'ait été accidenté.

Exercice 4. Le ministre syldave de l'Éducation décide de donner le bac à 80% des enfants dès leur naissance. C'est vrai ! Pourquoi attendre 18 ans et dépenser tant d'argent quand on est même pas sûr du résultat, tout ça pour permettre à des profs d'être payés à être en vacances la moitié de l'année ?
Le ministre découpe donc dans du carton dix carrés numérotés de 1 à 10 et propose au nouveau-né de tirer un carton au hasard.

— si c'est un multiple de cinq, il est recalé,
— si c'est un sept,il obtient la mention « très bien »,
— si c'est un multiple de quatre, il obtient la mention « bien »,
— si c'est un multiple de trois, il obtient la mention « assez bien »
— sinon, il obtient la mention « passable ».

1. Calculer la probabilité pour un nouveau-né syldave d'obtenir le bac avec la mention « passable ».

2. Le village natal du beau-frère du ministre attend sept naissances pour l'année qui suit. On sait qu'il y aura trois filles et quatre garçons [1]. On note X la variable aléatoire égale au nombre de garçons bacheliers et Y la variable aléatoire égale au nombre de filles bachelières parmi ces bébés.
   (a) Déterminer les lois de probabilité de X et Y.
   (b) Compléter les deux tableaux suivants :

X	0	1	2	3	4	Total
$p(X=k)$	0.0016	……	……	……	……	1

Y	0	1	2	3	Total
$p(Y=k)$	0,008	……	……	……	1

   (c) Calculer la probabilité d'avoir plus de bachelières que de bacheliers. (on pourra s'aider d'un arbre)
   (d) Calculer la probabilité pour que ce village dépasse l'objectif du ministre.

Exercice 5. Suite à une étude démographique de la Syldavie, on estime que la probabilité pour qu'un Syldave interrogé au hasard ne connaisse pas par cœur les œuvres du GGC (Grand Guide Charismatique) est de p.
On a classé la population en m groupes de n Syldaves. On va comparer deux stratégies pour détecter les traitres incultes dans chaque groupe :

— la première consiste à interroger les syldaves un par un ;
— on suppose que les services de renseignements syldaves ont mis au point un test rapide permettant de vérifier de manière globale si un groupe contient au moins un traitre. Si ce test global est positif, alors on interroge un a un ses membres pour identifier les traitres, sinon, on passe au groupe suivant.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de traites et Y la variable aléatoire qui compte le nombre de groupe comportant au moins un traite.

1. Déterminer la loi de X et donner son espérance.
2. (a) On considère un groupe de n syldaves (Z est la variable aléatoire qui compte le nombre de traitre dans ce groupe), démontrer que la probabilité qu'au moins un syldave soit un traitre vaut :

$$p(Z \geq 1) = 1-(1-p)^n$$

   (b) Expliquer pourquoi $Y \hookrightarrow B(m; 1-(1-p)^n)$.
3. On suppose à présent que $p = \dfrac{1}{100}$. Déterminer pour quelles valeurs de n la deuxième méthode est plus économique.

Exercice 6. Dans lequel des cas suivants X est-elle une variable binomiale ? Donnez quand c'est possible les paramètres de la loi ainsi que l'espérance.

1. Dans une classe on tire au sort et sans remise 5 élèves, X est le nombre d'élèves abonné à Star'Ac mag dans le lot tiré au sort.
2. Dans un sac de 20 billes contenant 7 noires et 13 blanches, on tire avec remise 3 d'entre elles, X étant le nombre de billes noires obtenues.
3. On lance 10 dés, X est le nombre de « 5 » obtenus.
4. Un circuit comprend 32 lampes en série, pour chacune d'elle, la probabilité qu'elle fonctionne est de 3/100, X est le nombre de lampes qui s'allument lorsqu'on appuie sur l'interrupteur. Même exercice avec cette fois des lampes en parallèle.

Exercice 7.
Chaque crocodile qui traverse la clairière séparant les kékés (une espèce très particulière qui vit dans le monde imaginaire des mathématiques...) du fleuve a une probabilité 1/3 de périr écrasé par un éléphant sautant en parachute (tout est permis dans le monde imaginaire des mathématiques...). Un matin, 32 crocodiles quittent les kékés pour rejoindre le fleuve. On note X, le nombre de victimes des éléphants parmi ces crocodiles. Les survivants reviennent le soir par le même chemin. On note Y le nombre total de victimes.

1. Calculer la probabilité que 22 crocodiles se baignent (sans périr) dans le fleuve.

1. Comme chacun sait, la capitale syldave s'appelle Gattaca

2. Calculer la probabilité que 7 crocodiles retournent sains et saufs le soir dans les kékés.
3. Calculer $E(Y)$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 8. Un basketteur effectue une série de 7 lancers francs. Il réussit chacun des lancers francs avec une probabilité égale à p.
Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la plus petite valeur de p, à 10^{-2} près, telle qu'on soit sûr à plus de 99% que le basketteur réussisse au moins un des sept lancers francs.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{3}{4}$. On donne $\binom{6}{2} = 15$.

1. Donner sous forme de fraction irréductible les probabilités $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.
2. En déduire $P(X \geq 3)$.

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{5}$.
Sachant que $E(X) = 4$, calculer l'écart-type de X.

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres 16 et $p \leq \frac{1}{2}$.
Sachant que $\sigma(X) = 1$, calculer l'espérance de X.

Exercice 12. En syldavie, Norbert fait participer son chat Banshee au jeu des « lancers de souris ».
Le jeu consiste à lancer **quatre fois** fois une souris en l'air et à tenter de la rattraper. Banshee estime que sa probabilité de rattraper une souris est toujours égale à $\frac{3}{5}$
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de souris rattrapée par Banshee lors d'une épreuve (donc lors de **quatre** lancers).

1. Déterminer la loi de X. Justifier.
2. Calculer la probabilité que Banshee rattrape au moins une souris.
3. Calculer la probabilité que Banshee rattrape exactement 1 souris.
4. Calculer la probabilité que Banshee rattrape exactement 2 souris.
5. Calculer $E(X)$. Interpréter.
6. Calculer $\sigma(X)$. Banshee est-il régulier ?

Exercice 13. Dans une loterie, à chaque jeu on a 5% de chance de gagner. On décide de jouer n fois (avec n entier naturel non nul). Chaque jeu est indépendant des autres.
Soit X la variable aléatoire déterminant le nombre de fois où on gagne à cette loterie lors des n jeux.

1. Quelle loi suit X ? Donner ses paramètres.
2. Montrer que $P(X > 0) = 1 - 0.95^n$
3. A l'aide d'un tableau de valeurs à la calculatrice, déterminer le plus petit entier n pour laquelle $P(X > 0) \geq 0.5$.
4. Interpréter cette valeur trouvée dans le contexte de l'exercice.

Exercice 14. Donner sans calcul la valeur des coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{12}{1} \qquad \binom{17}{16} \qquad \binom{827}{1} \qquad \binom{12358}{0} \qquad \binom{4651}{4651}$$

Exercice 15. Sachant que $\binom{101}{2} = 5050$, donner la valeur des coefficients binomiaux suivants sans utiliser la calculatrice :

$$\binom{101}{99} \qquad \binom{102}{2} \qquad \binom{102}{100}$$

Exercice 16. A l'aide du triangle de Pascal, déterminer un coefficient binomial auquel chacun de ces nombres correspond en prenant la plus petite valeur de n possible :

$$6 \qquad 5 \qquad 15 \qquad 35 \qquad 70$$

En proposer alors deux autres évidents.

II. Loi géométrique tronquée

Exercice 17. On utilise une pièce de monnaie déséquilibrée, telle que la probabilité d'obtenir « Face » soit $0,3$. Une expérience consiste à lancer une pièce au plus 5 fois, mais on s'arrête dès que l'on obtient « Face ».

1. Faire un arbre pondéré représentant l'expérience. Combien cette expérience a-t-elle d'issues ?
2. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où la pi-ce a été lancée.
   (a) Etablir la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance de X.

Exercice 18. L'oncle de Tatiana est accroc au jeu de grattage. Chaque semaine, il achète jusqu'à 20 euros de cartes à gratter à deux euros. Il achète une première carte, la gratte. Si elle est gagnante, il s'arrête, sinon il en achète une seconde, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait une carte gagnante ou bien qu'il ait dépensé 20 euros. La probabilité d'avoir une carte gagnante est connu et vaut $0,12$.

1. Modéliser cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que l'oncle achète 4 cartes ?
3. Quelle est la probabilité que l'oncle achète 10 cartes ?
4. Quelle est la probabilité que l'oncle ne gagne rien ?
5. Soit X la variable aléatoire qui à chaque série d'achats de la semaine, associe la somme dépensée.
   (a) Etablir la loi de probabilité de X.
   (b) Quelle est l'espérance de X ? Interpréter ce résultat.

III. Algorithme

Exercice 19. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: A, i et C sont des nombres entiers naturels.
C := 0
Pour i allant de 1 à 9 **Faire**
    A prend la valeur d'un nombre entier aléatoire entre 1 et 7
    Si (A > 5) **Alors**
        C := C + 1
    Fin Si
Fin Pour
Afficher C.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre affiché par cet algorithme.

1. Quelle loi suit X ? Donner ses paramètres.

2. Que faut-il changer dans le programme pour que les paramètres de la loi suivie par X soient 10 et 0.2 ?
3. Programmer cet algorithme sur votre calculatrice ou sur un ordinateur.

Exercice 20. Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle $[1\,;50]$
   - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Algorithme 2 :

Données: a, b, c, d, e sont des variables du type entier
$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Tant que $((a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e))$ **Faire**
    $a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ;
    $c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ;
    $e :=$ rand(1, 50)
Fin Tant que
Afficher a, b, c, d, e

   (a) Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2\,;\,11\,;\,44\,;\,2\,;\,15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
   $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

   (b) Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?
3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à $0,1$.
4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

   (b) On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :
      - il a été contrôlé 5 fois exactement ;
      - il n'a pas été contrôlé ;
      - il a été contrôlé au moins une fois.

IV. Un exemple de devoir

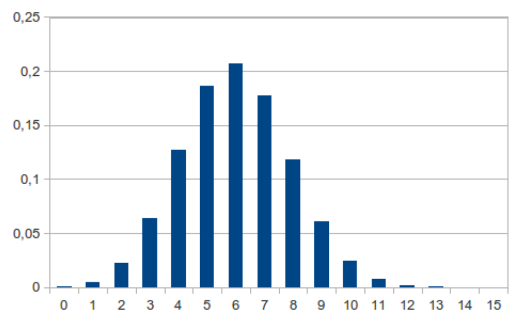
Exercice 21. (2 points)

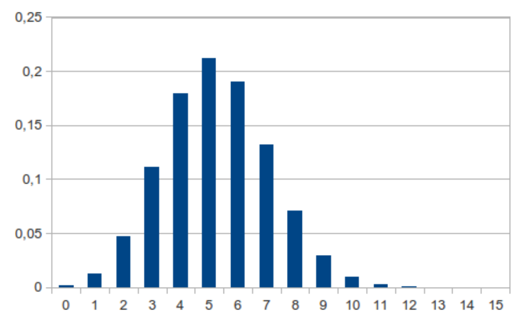
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 10 et p avec $p > \frac{1}{2}$.
Sachant que $V(X) = 2$, calculer p puis $E(X)$.

Exercice 22. (8 points)

Le ministre syldave a supprimé la faculté de médecine. L'unique dentiste de Gattaca est un ancien boxeur, à moitié-aveugle et parkinsonien.
Les syldaves venant le consulter se font toujours arracher une dent.
Le dentiste arrive à peu près à discerner la dent malade grâce aux indications des patients, et essaie toujours d'extraire celle-ci, mais sa maladie le faisant trembler, il n'a qu'une probabilité de 0.4 de réussir.
Le dentiste reçoit quinze clients par jour, en on note X le nombre de dents malades extraites à bon escient sur ces quinze clients.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. *Justifier.*
2. Calculer la probabilité pour qu'aucun des patients n'y laisse une dent malade.
3. Calculer la probabilité que le dentiste arrache exactement 11 dents malades.
4. Calculer la probabilité pour que le dentiste arrache au moins 2 dents malades.
5. Finalement, le dentiste a extrait 7 dents malades. Peut-il être satisfait de lui-même ?
6. Parmi les deux diagrammes en barres suivant, lequel peut représenter la loi de probabilité de X ? *Justifier*





7. Avant chaque intervention, le patient paie 30€, puis le dentiste lui arrache une dent. Si c'est la bonne, le patient doit encore payer 20€.
   (a) Combien le dentiste peut-il espérer gagner d'argent en une journée ? Justifier.
   (b) Les tremblements du dentiste empirant, sa probabilité d'extraire une dent malade risque de baisser.
   A partir de quelle probabilité de réussite ce métier lui permet-il de gagner plus de 510€ par jour ?

Exercice 23. (10 points)

Une compagnie de transports désire optimiser les contrôles afin de limite l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.
Un trajet côute 10€. En cas de fraude, l'amende est de 100€.
Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés (ce n'est pas bien du tout !).
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

1. Quelle loi suit X. Justifier.
2. On suppose que $p = 0.05$.
   (a) Calculer à 10^{-4} près $P(X = 5)$. Interpréter.
   (b) Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au moins une fois.
   (c) Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au plus deux fois.
3. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
   (a) Justifier que $Z = 400 - 110X$.
   (b) Calculer $E(Z)$.

4. (a) La fraude est-elle favorable ou non pour Théo ?
   (b) Pour quelles valeurs de p en serait-il autrement ?

Exercice 24. Le druide de Gattaca a besoin pour préparer sa potion magique de champignons syldave. Il envoie 11 vaillants citoyens les chercher. Parsemé de périls et d'embuche on estime qu'un citoyen (aussi vaillant soit-il) a 2 chances sur 17 de périr pour aller dans la forêt et tout autant pour revenir à Gattaca.

1. Calculer la probabilité qu'un citoyen revienne vivant de l'excursion. *on pourra s'aider d'un arbre de probabilité.*
2. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de survivant.
   (a) Expliquer pourquoi $X \hookrightarrow B\left(11; \dfrac{225}{289}\right)$
   (b) Calculer la probabilité qu'au moins un citoyen ramène des champignons syldave nécessaire à la préparation de la potion magique.
   (c) Calculer $p(X=0)$ et $p(X=1)$.
   (d) En déduire la probabilité qu'au moins deux citoyens ramène des champignons syldave.
   (e) Calculer $E(X)$. Interpréter.
3. Lance, un jeune cycliste Syldave, n'a pas la permission de consommer les champignons préparé par le druide, il décide donc de se débrouiller tout seul. Pendant une semaine tous les matins, Lance part chercher les fameux champignons et revient le soir afin de les préparer et de les manger.
   On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Lance a pu manger des champignons syldave.
   (a) Donner $p(Y=1)$ et $p(Y=2)$.
   (b) Recopier et compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(Y=k)$								