Exercices : Racines Carrés et Valeurs Absolues

I. Racines Carrées, Variations : applications aux suites

Exercice 1. On a représenté graphiquement dans un repère les fonctions f, g, h et k définies par :

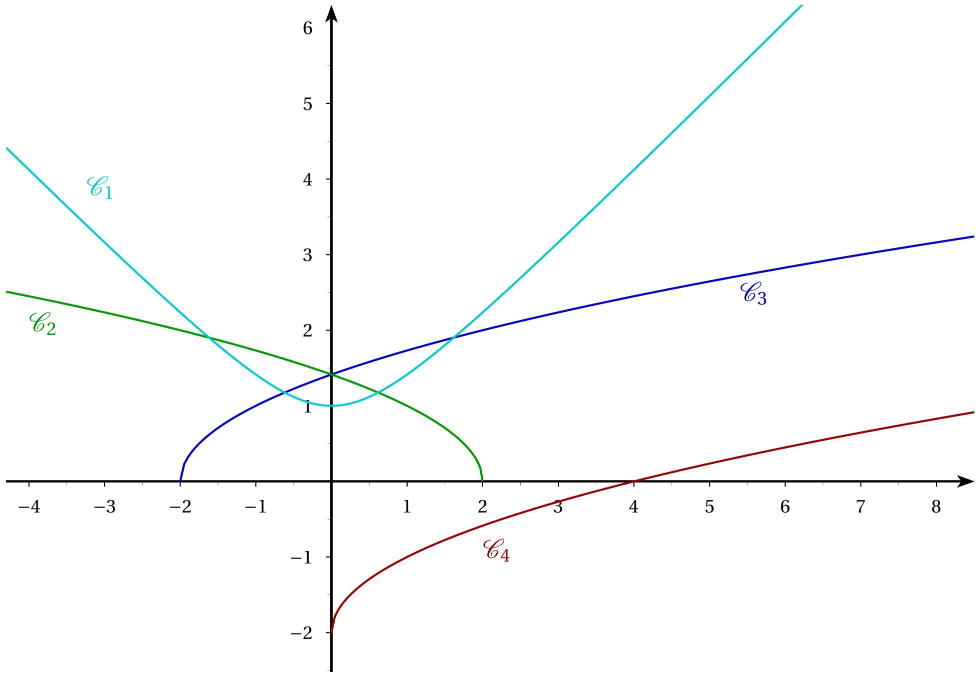
— $f(x) = \sqrt{x+2}$

— $g(x) = \sqrt{2-x}$

— $h(x) = \sqrt{x} - 2$

— $k(x) = \sqrt{x^2+1}$

Associer à chacune de ces fonctions la représentation graphique qui lui correspond.



Exercice 2. Déterminer l'ensemble de définition pour la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x}$.

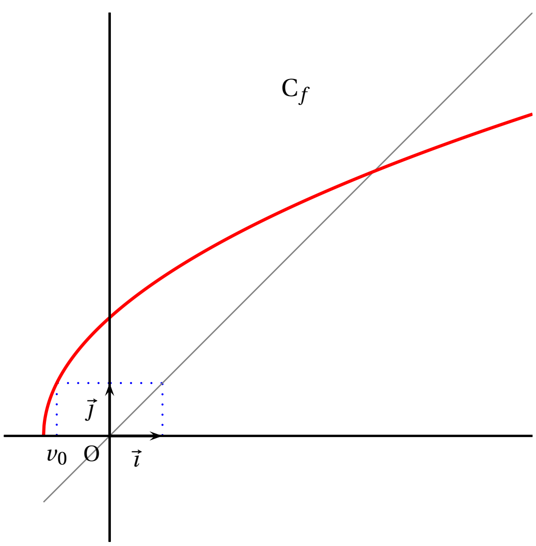
Exercice 3. Etudier les variations des fonctions f définies par :

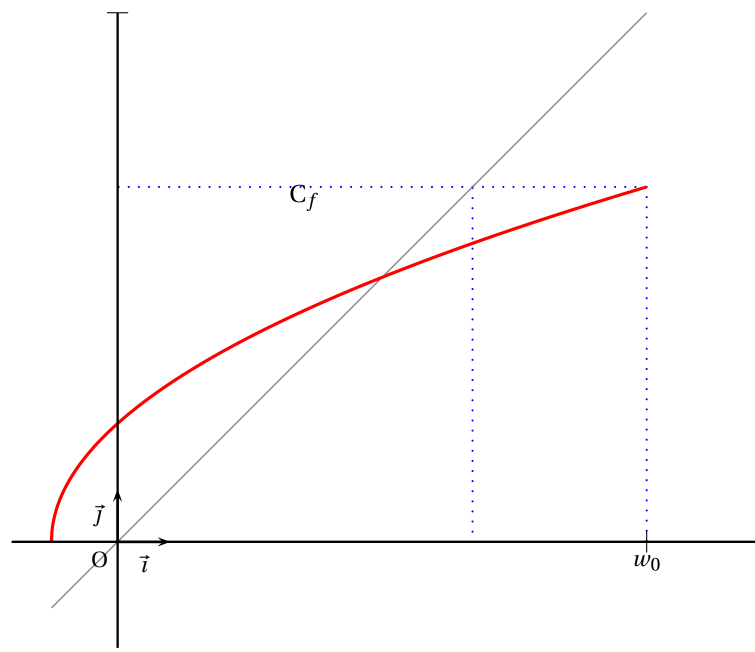
1. $f(x) = \sqrt{5x-1}$
2. $f(x) = \sqrt{1-5x}$
3. $f(x) = \sqrt{7x-9} + 2$
4. $f(x) = \sqrt{9-6x}$

Exercice 4. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{4x+5}$$

1. Déterminer son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathscr{D}_f$
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.
   (a) Calculer les premiers termes de la suite u.
   (b) Démontrer que la suite u est croissante.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 = -1$
   (a) Placer sur l'axe des abscisses les premiers de la suite v en s'aidant de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ donné ci-dessous puis conjecturer le sens de variation et la limite de v.
   (b) Démontrer que si $v_n < v_{n+1}$ alors $v_{n+1} < v_{n+2}$.
   (c) Vérifier que $v_0 < v_1$; en déduire le sens de variation de v.
5. Soit (w_n) la suite définie par $w_{n+1} = f(w_n)$ et $w_0 = 10$
   (a) Placer sur l'axe des abscisses les premiers de la suite w en s'aidant de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ donné ci-dessous puis conjecturer le sens de variation et la limite de w.
   (b) Démontrer que si $w_n > w_{n+1}$ alors $w_{n+1} > w_{n+2}$.
   (c) Vérifier que $w_0 > w_1$; en déduire le sens de variation de la suite v.



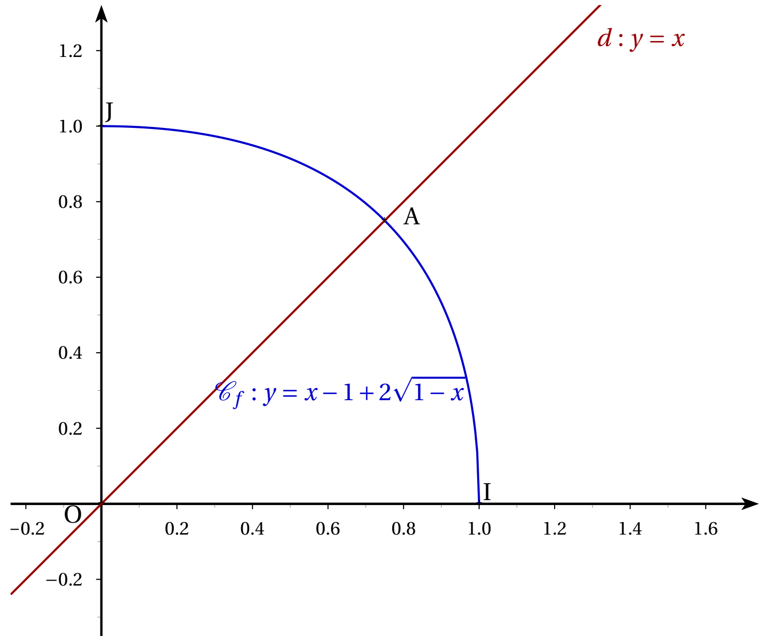


Exercice 5. Dans un repère orthonormé (O, I, J), on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction g définie sur $[0;1]$ par :

$$g(x) = x - 1 + 2\sqrt{1-x}$$

ainsi que la droite d qui représente graphiquement la fonction affine f définie par $f(x) = x$.

1. Montrer que I et J sont deux points de $\mathscr{C}$.
2. La droite d coupe $\mathscr{C}$ en A. Calculer les coordonnées du point A.
3. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un quart de cercle de centre O ?



<u>Exercice</u> 6. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: x et y sont des nombres réels.
Entrer x
Si ($x > 1$) **Alors**
$y := \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$
Sinon
Afficher « impossible ».
Fin Si
Afficher y

1. Tester cet algorithme pour les valeurs suivantes de x : -1, 0, 1, 2, 3 et 5.
2. Expliquer les réponses obtenues pour les valeurs de -1, 0 et 1 de x.
3. Déterminer l'expression algébrique, donnant y en fonction de x, définie par cet algorithme, ainsi que l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x pour lesquels elle est définie.
4. Démontrer que la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $x \longmapsto y$ est décroissante.

<u>Exercice</u> 7.

PARTIE A. **Une fonction auxiliaire**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 4x + 5$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$$
2. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq 0$$
3. Dresser le tableau de variation de g

PARTIE B. **Etude d'une fonction composée**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

1. Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir que la fonction f admet un minimum à préciser.

II. Valeurs Absolues : Résolution d'équation et d'inéquation

Exercice 8. Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :

1. $|x-2| = 3$ avec $I = \mathbb{R}$
2. $|x+5| = |3-x|$ avec $I = \mathbb{R}$
3. $\left|\cos x - \dfrac{1}{2}\right| \leq 1$ avec $I =]-\pi;\pi]$

Exercice 9. Un chien errant a été signalé sur une autoroute à moins de 3 km de la borne kilométrique 50, mais à plus de 5 km de la borne 54. On appelle x le réel qui repère la position du chien sur l'autoroute.

1. Traduire l'énoncé en utilisant des valeurs absolues.
2. Entre quelles bornes kilométriques de l'autoroute ce chien peut-il se trouver ?

III. Valeurs Absolues : Applications aux limites de suites

Exercice 10. On considère les suites u, v et w définies par :

$$u_n = 1 + \frac{2}{n} \quad ; \quad v_n = \frac{7}{n} - 3 \quad \text{et} \quad w_n = \frac{5}{n+1}$$

1. Donner, sans justification :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} w_n$$

2. Soit ϵ un nombre réel strictement positif, on considère les équations (E), (F) et (G) suivantes :

$$(E) : |u_n - 1| \leq \epsilon \quad ; \quad (F) : |v_n + 3| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad (G) : |w_n| \leq \epsilon$$

(a) Résoudre les équations (E), (F) et (G) pour $\epsilon = 0,1$ et $\epsilon = 10^{-3}$

(b) On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 2 :

Données: $u \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
$u := 3$
$n := 1$
Tant que ($|u-1| > \epsilon$) **Faire**
  $n := n+1$
  $u := 1 + \dfrac{2}{n}$
Fin Tant que
Afficher n

Algorithme 3 :

Données: $v \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
$uv = 4$
$n := 1$
Tant que ($|v+3| > \epsilon$) **Faire**
  $n := n+1$
  $v := \dfrac{7}{n} - 3$
Fin Tant que
Afficher n

Qu'affiche ces deux algorithmes lorsque l'utilisateur entre $\epsilon = 0,1$ puis lorsqu'il entre $\epsilon = 10^{-3}$?

(c) Ecrire un algorithme permettant d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $|w_n| \leq \epsilon$

(d) Résoudre l'équation (E). Qu'a-t-on démontré ?

(e) De la même manière résoudre les équations (F) et (G) et préciser les résultats ainsi démontrés

IV. Pour aller plus loin

Exercice 11. Soit la fonction R définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$R(x) = |36x^2 - 810x + 2753|$$

1. Quel est le plus grand entier inférieur ou égal à $\sqrt{2753}$? Soit N cet entier naturel que l'on nomme **partie entière de** $\sqrt{2753}$ et que l'on note E(2753).
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ le plus petit des diviseurs de R(0) = 2753. Voici une liste d'entier : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
   (a) Quelle propriété arithmétique ces entiers vérifient-ils ?
   (b) Vérifier qu'aucun de ces nombres ne divise 2753.
   (c) En déduire que $d \geq 53$.
   (d) A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer qu'il ne peut exister d'entier d, strictement supérieur à 1 et strictement inférieur à 2753 qui soit un diviseur de 2753.
   (e) Quelle conclusion peut-on faire au sujet de 2753 ?
3. Etablir un raisonnement analogue pour R(1).
   Conclure sur la nature de ce nombre.
4. Ecrire sur une calculatrice ou sur algobox un algorithme qui :
   — demande la saisie d'un entier naturel n supérieur ou égal à 2 ;
   — teste, pour i allant de 2 à $E(\sqrt{n})$ de 1 en 1, si i divise n et renvoie *vraie* si l'entier n est premier et *faux* sinon.
5. Coder une calculatrice ou algobox un algorithme qui :
   — demande la saisie d'un entier naturel m
   — renvoie, pour j allant de 0 à m de 1 en 1, la réponse du test de primalité (établi à la question précédente) de l'entier $R(j)$.
   En déduire combien d'entiers premiers successifs, la fonction R génère lorsque x vaut 0, 1, 2, 3, 4, ...

Histoire des sciences

— En 1772, Leonhard Euler, proposa la formule :

$$E(n) = n^2 + n + 41$$

qui donne des nombres premiers pour n allant de 0 à 39.

— En 1798, le mathématicien français Adrien-Marie Legendre proposa le polynôme du second degré suivant :

$$L(n) = 2n^2 + 29$$

qui produit des nombres premiers pour n allant de 0 à 28.

— Aujourd'hui, le record est détenu par Russel Ruby qui proposa en 1987 l'expression :

$$R(n) = 36n^2 - 810n + 2753$$

L'expression $|R(n)|$ fournit le plus grand nombre consécutifs de nombres premiers.

Exercice 12. (Olympiades)

On définit pour chaque couple de réel $(a;b)$ la fonction f par :

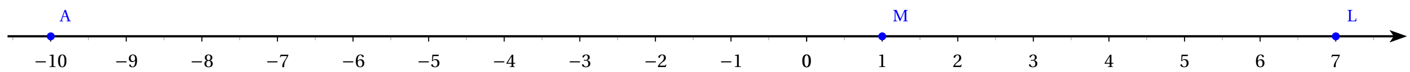
$$f(x) = a - \sqrt{x+b}$$

Deux nombres réels u et v sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels $(a;b)$ tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1. Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
2. Peut-on dire autant de 4 et 7 ?
3. A quelle condition deux **entiers** u et v sont-ils échangeables ?

V. Extrait de devoir

Exercice 13. (8 points)
Maurice est un homme très jaloux. Amoureux de Gertrude, il ne peut supporter que celle-ci se retrouve trop proche d'Alexandre et de Louis, enfin tout du moins dans des conditions très spéciales. Maurice, Gertrude, Alexandre et Louis vivent dans un monde à une dimension, que nous représentons de la manière suivante :



Ci-dessus A représente la position d'Alexandre, M celle de Maurice et L celle de Louis. Les trois hommes, trop vieux, ne sont plus en capacité de se déplacer.
Plus en forme Gertrude, dont la position est donnée par le point G d'abscisse x, est encore capable de se déplacer.
Gertrude, amoureuse cachée de Maurice, a constaté que ce dernier ne souffrait pas du tout dès que les deux conditions suivantes ont lieu en même temps (et qu'il souffrait sinon) :

Condition 1 : GL $\geq$ GM. *Condition 2 :* GA $\geq$ 2GM.

Le but du problème est de déterminer les positions où peut se trouver Gertrude sans que Maurice ne souffre.

PARTIE A. **Modélisation du problème**

1. (a) Si Gertrude se trouve en T le point d'abscisse $x = -3$, Maurice souffre-t-il ?
   (b) Si Gertrude se trouve en T le point d'abscisse $x = 3$, Maurice souffre-t-il ?
2. Exprimer les distances GL, GM et GA en fonction de x en utilisant des valeurs absolues.

PARTIE B. **Etude de fonctions défnies par des valeurs absolues**

On considère les fonctions f, g et h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |7 - x| \qquad ; \qquad g(x) = |x - 1| \qquad \text{et} \qquad h(x) = |x + 10|$$

1. Ecrire $f(x)$ sans utiliser les valeurs absolues, en distinguant les cas $x \geq 7$ et $x \leq 7$.
2. Ecrire $g(x)$ sans utiliser les valeurs absolues, en distinguant deux cas.
3. Ecrire $h(x)$ sans utiliser les valeurs absolues.
4. Représenter graphiquement dans un même repère les courbes des fonctions f et g, puis résoudre (graphiquement) l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
5. Représenter graphiquement dans un même repère les courbes des fonctions h et k où $k(x) = 2|x - 1|$, puis résoudre (graphiquement) l'inéquation $h(x) \geq k(x)$.
6. Conclure.

PARTIE C. **Résolution du problème de Gertrude par calcul**

1. Résoudre l'inéquation : $|7 - x| \geq |x - 1|$.
   Indication : On pourra distinguer trois cas.
2. Résoudre l'inéquation : $|x + 10| \geq 2|x - 1|$
   Indication : On pourra distinguer trois cas.
3. Conclure.