Chapitre 5

Variable Aléatoire

Hors Sujet

Titre : « Small Change »
Auteur : Tom Waits
Présentation succinte de l'auteur : Thomas Alan Waits est un auteur-compositeur, musicien, chanteur, réalisateur musical, et acteur américain né le 7 décembre 1949, à Pomona en Californie.

Son travail se distingue généralement par sa voix rocailleuse, sa forte personnalité, sa présence sur scène très théâtrale et l'humour de mises en monde portées par des textes cyniques. Waits possède une voix reconnaissable, décrite un jour par un critique comme trempée dans un fût de Bourbon, séchée et fumée pendant quelques mois, puis sortie et renversée par une voiture1. Avec des bruits de bouche comme signes distinctifs, il incorpore des styles antérieurs au rock comme le blues, le jazz, le bluegrass, le vaudeville ou la musique country ; Tom Waits s'est bâti un personnage distingué et distinct.

Ses textes sont ceux d'un portraitiste du bizarre, peuplés de personnages et de lieux miteux, criblés d'images d'un romantisme souvent déglingué voire fantomatique, arrosés de loin en loin d'une valse irlandaise. Mordants, chaleureux et tristes, ses textes se démarquent aussi par leur drôlerie, dont témoignent diverses interviews accordées tout au long de sa carrière.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- ⇝ Calculer une espérance et interpréter le résultat.
- ⇝ Calculer un écart-type et interpréter le résultat.
- ⇝ Utiliser les arbres de probabilité.

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

Leçon 5

Variable Aléatoire

Au fil du temps

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent axiomatique) en a été proposée trois siécles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI^e siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu (c'est d'ailleurs pourquoi on en a gardé le vocabulaire).

Parmi toutes les définitions possibles du hasard, nous en retiendrons deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

- pour certains, tout a une cause, et le hasard n'est le reflet que de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature. Cet esprit souffla particulièrement au XVIII ème siècle au moment où Laplace posa les bases d'une première théorisation des probabilités. Les probabilités sont alors déterminées a priori, par des considérations non expérimentales. Par exemple, un dé a six faces, donc, on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de $\frac{1}{6}$. Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de Pascal, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourrir à l'expérience. Elle implique la notion centrale d'équiprobabilité : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
  Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ?
- pour d'autres, le hasard constitue notre univers, i.e qu'il n'est pas qu'une abstraction mathématiques mais une réalité physique. La théorie du chaos mise en forme par René Thom en 1955 montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent pas de prévoir mieux des états possibles futurs.

Alors, le hasard, une réalité physique ou une invention mathématiques ? Au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent et il faut les avoir en tête. Ces deux notions ont en commun de postuler que l'issue de l'expérience (le jeté d'un dé) est indépendant de l'observateur, mais ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie ou la physique quantique.

Dans ce chapitre, nous allons revoir les bases des probabilités, à savoir la construction de modèles pour décrire des expériences aléatoires, ainsi que le vocabulaire et les propriétés de base. Le besoin d'avoir une méthode systématique de modélisation est justifié par le fait que certains résultats nous semblent parfois intuitivement évidents mais sont en réalité faux, comme en témoignent les problèmes d'introduction ci-dessous.
Ensuite, nous découvrirons les variables aléatoires, qui associent des résultats d'expériences aléatoires à des variables telles qu'un gain éventuel. Nous apprendrons alors à déterminer certains paramètres de ces expériences, telles que le gain que l'on peut espérer gagner ou le risque d'un jeu, sans avoir à le réaliser.

I. Univers, événement et loi de probabilité

I.1. Univers, événement

Définition 1.

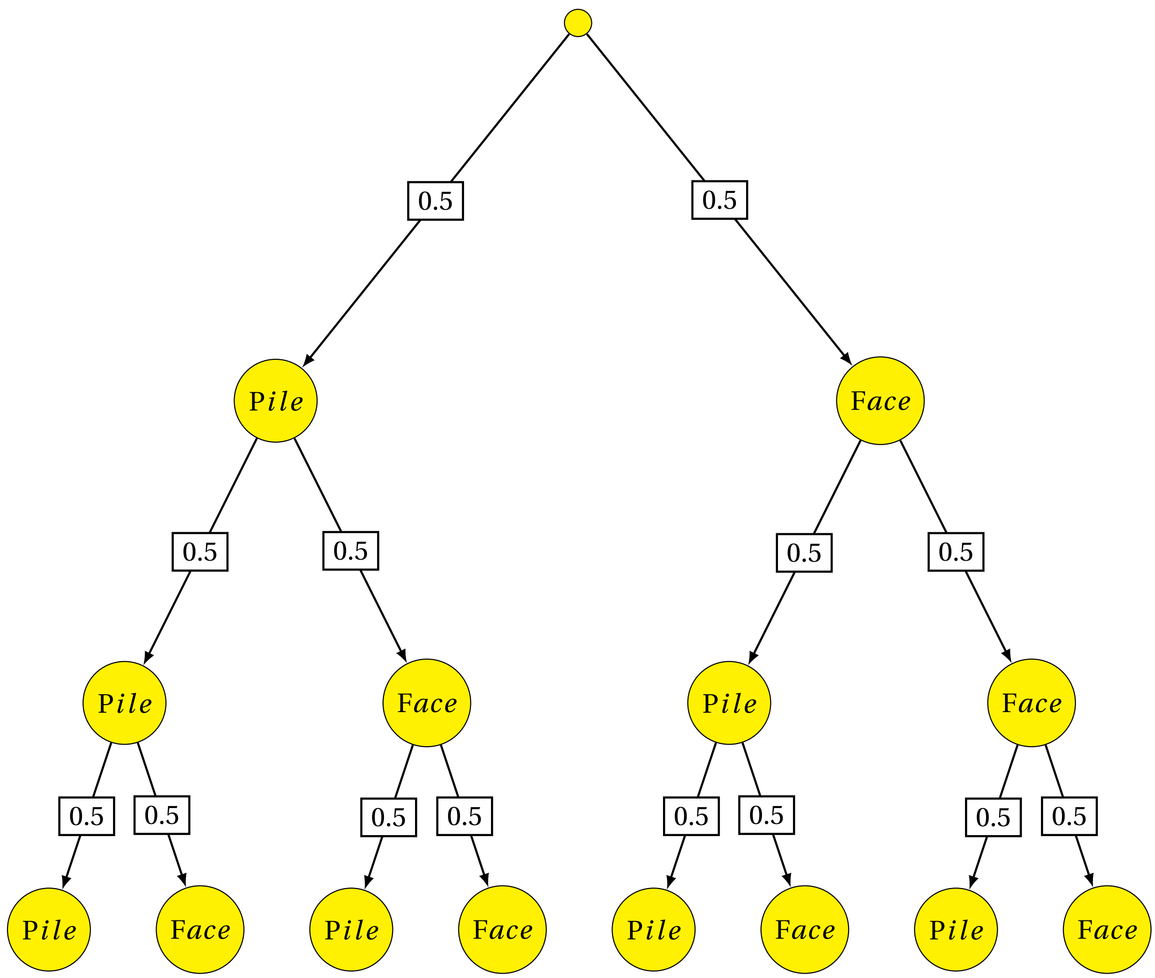
L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers**, souvent noté Ω.

Exemple :

1. On lance deux dés et on observe la somme obtenue. Dans ce cas :

$$\Omega = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$$

2. On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Il est astucieux d'utiliser des arbres de probabilités pour décrire l'univers dans ce type de cas :



L'univers de cette expérience aléatoire est alors :

$$\Omega = \{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$$

Remarque : Dans des chacun des cas précédent l'univers comporte un nombre fini d'éléments, nous nous contenterons d'étudier cette année des situations de ce type.

Définition 2.

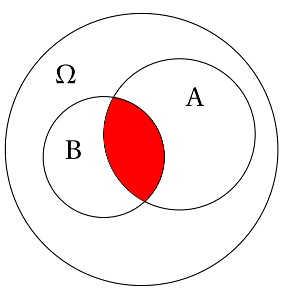
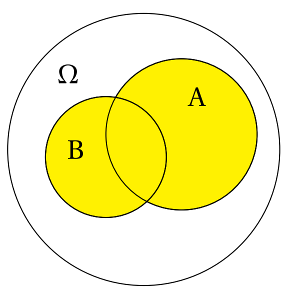
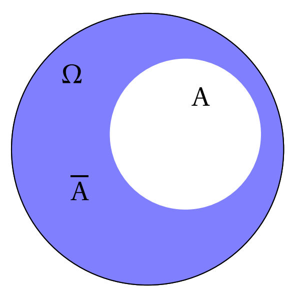
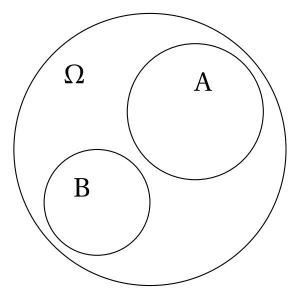
Un événement est un sous ensemble de l'univers. On le décrit soit par une phrase soit en lisant tous les éléments de cet ensemble.

Exemple :

1. Pour la somme de deux dés.
   Soit A l'événement :« obtenir un résultat premier » alors $A = \{2;3;5;7;11\}$ Soit B l'événement :« obtenir un résultat pair » alors $B = \{2;4;6;8;10;12\}$ Soit C l'événement :« obtenir sept » alors $C = \{7\}$
   Remarque : Chaque résultat est appelé issue ou éventualité ; ainsi C est une issue.

2. Pour le lancer de 3 pièces de monnaie. Soit A l'événement : « obtenir trois fois le même résultat » alors $A = \{PPP;FFF\}$
   Soit B l'événement : « obtenir au moins 2 fois piles » alors $B = \{PPP;PPF;PFP;FPP\}$

I.2. Opération sur les événements

<table>
<tr><td>$A \cap B$</td><td>$A \cup B$</td><td>$\overline{A}$</td><td>$A \cap B = \emptyset$</td></tr>
<tr><td>Intersection de A et B : Eléments communs de A et B</td><td>Réunion de A et B : Eléments de A ou B (voire les deux)</td><td>Complémentaire de A : Eléments de Ω non dans A</td><td>A et B sont disjoints : Aucun élément commun à A et B</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Exemple :

1. Pour la somme de deux dés si $A = \{2;3;5;7;11\}$ et $B = \{2;4;6;8;10;12\}$ alors on a :
   $A \cup B = \{2;3;4;5;6;7;8;10;11;12\}$ et $A \cap B = \{2\}$ puis $\overline{A} = \{4;6;8;9;10;12\}$ et $\overline{B} = \{3;5;7;9;11\}$.
2. Pour le lancer de trois pièces de monnaie, si $A = \{PPP;FFF\}$ et $B = \{PPP;PPF;PFP;FPP\}$ alors on a :
   $A \cup B = \{PPP;PPF;PFP;FPP;FFF\}$ et $A \cap B = \{PPP\}$ puis $\overline{A} = \{PPF;PFP;FPP;FFP;FPF;PFF\}$ et enfin $\overline{B} = \{FFF;FFP;FPF;PFF\}$

Propriété 1.

Soit A et B deux événements alors on a :

$$A \subset A \cup B \qquad \text{et} \qquad A \cap B \subset A$$

I.3. Loi de probabilité

Définition 3.

P est une loi de probabilité sur l'univers Ω si et seulement si elle vérifie les trois axiomes suivants :

1. La probabilité d'un événement A est comprise entre 0 et 1 :
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
2. La probabilité de l'univers vaut 1 :
$$P(\Omega) = 1$$
3. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple :

Pour définir la loi de probabilité associé au lancer de deux dés, il suffit de compléter le tableau suivant en respectant l'axiome 2 :

Issue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Probabilité												1

Ensuite il s'agit de modéliser correctement cet expérience et donc de dénombre toutes les manières d'obtenir 2, 3, 4, ect...
Pour obtenir 2 il faut faire $1+1$.
Pour obtenir 3 il faut faire $2+1$ ou $1+2$
Pour obtenir 4 il faut faire $3+1$ ou $1+3$ ou $2+2$.
Pour obtenir 5 il faut faire $4+1$ ou $1+4$ ou $3+2$ ou $2+3$
Pour obtenir 6 il faut faire $5+1$ ou $1+5$ ou $4+2$ ou $2+4$ ou $3+3$.
Pour obtenir 7 il faut faire $6+1$ ou $1+6$ ou $5+2$ ou $2+5$ ou $4+3$ ou $3+4$.
Pour obtenir 8 il faut faire $6+2$ ou $2+6$ ou $5+3$ ou $3+5$ ou $4+4$.
Pour obtenir 9 il faut faire $6+3$ ou $3+6$ ou $5+4$ ou $4+5$.
Pour obtenir 10 il faut faire $6+4$ ou $4+6$ ou $5+5$.
Pour obtenir 11 il faut faire $6+5$ ou $5+6$.
Pour obtenir 12 il faut faire $6+6$.
On dénombre un total de 36 possibilités toutes équiprobables donc :

Issue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

En respectant le troisième axiome il est alors possible de calculer la probabilité d'un événement quelconque.
Par exemple :
$$P(A) = P(\{2;3;5;7;11\}) = \frac{1}{36} + \frac{2}{26} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{15}{36}$$
ou encore :
$$P(B) = P(\{2;4;6;8;10;12\}) = \frac{1+3+5+5+3+1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$
ou encore :
$$P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{36} \qquad \text{et} \qquad P(A \cup B) = P(\{2;3;4;5;6;7;8;10;11;12\}) = \frac{32}{36}$$

Propriété 2.

Soit P une loi de probabilité sur un univers Ω, A et B deux événements alors :

1. $\mathrm{P(A)+P(\overline{A})=1 \iff P(\overline{A}=1-P(A)}$
2. $\mathrm{P(\emptyset)=O}$
3. $\mathrm{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$
4. $\mathrm{P(A)\leq P(A\cup B)}$ et $\mathrm{P(A\cap B)\leq P(A)}$.

Preuve

1. Nous avons $\mathrm{A\cap\overline{A}=\emptyset}$, par conséquent d'après l'axiome 3 on a :

$$\mathrm{P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})}$$

Or $\mathrm{A\cup\overline{A}=\Omega}$ d'où :

$$\mathrm{P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A}) \iff 1=P(A)+P(\overline{A})}$$

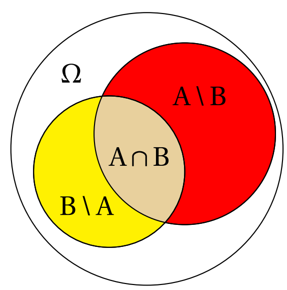
2.

$$\mathrm{1=P(\Omega)=P(\emptyset\cup\Omega)=P(\emptyset)+P(\Omega)=P(\emptyset)+1}$$

D'où $\mathrm{P(\emptyset)=0}$.

3. Tout repose sur ces découpages en événements disjoints deux à deux :

$$\mathrm{A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)}$$
$$\mathrm{B=(B\setminus A)\cup(A\cap B)}$$
$$\mathrm{A\cup B=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)}$$



Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{P(A)+P(B)-P(A\cap B)} &= \mathrm{P\Big((A\setminus B)\cup(A\cap B)\Big)+P\Big((B\setminus A)\cup(A\cap B)\Big)-P(A\cap B)} \\
&= \mathrm{P\Big(A\setminus B\Big)+P\Big(A\cap B\Big)+P\Big(B\setminus A\Big)+P\Big(A\cap B\Big)-P(A\cap B)} \\
&= \mathrm{P\Big(A\setminus B\Big)+P\Big(A\cap B\Big)+P\Big(B\setminus A\Big)} \\
&= \mathrm{P\Big((A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)\Big)} \\
&= \mathrm{P(A\cup B)}
\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$.

4. Cela découle du fait que $\mathrm{A\subset A\cup B}$ et $\mathrm{A\cap B\subset A}$

Exemple :

1. Reprenons donc l'exemple de la somme des deux dés et retrouvons $P(A\cup B)$ à l'aide de la dernière propriété.
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{15}{36}+\frac{18}{36}-\frac{1}{36}=\frac{32}{36}$$
On vient de retrouver le résultat que l'on avait calculé autrement.
2. Dans un omnisports, diverses activités sportives sont organisés (Foot, Bad, Equitation, ect...). Ce club comporte 200 adhérents dont 130 pratiquent le bad, 100 le foot et 50 le bad et le foot.
On choisit un membre au hasard, et on note F l'événement « l'adhérent est inscrit à la section foot » et B l'événement « l'adhérent est inscrit à la section bad ».
Déterminons $P(B)$; $P(F)$;$P(F\cap B)$; $P(F\cup B)$; $P(\overline{F})$; $P(\overline{B})$ et $P(\overline{F\cup B})$.
En utilisant les données de l'énoncé on obtient trivialement :
$$P(F)=\frac{100}{200} \qquad \text{et} \qquad P(B)=\frac{130}{200} \qquad \text{puis enfin} P(B\cap F)=\frac{50}{200}$$
On en déduit alors :
$$P(B\cup F)=P(B)+P(F)-P(B\cap F)=\frac{130+100-50}{200}=\frac{180}{200}$$
puis :
$$P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{200-130}{200}=\frac{70}{200} \qquad \text{et} \qquad P(\overline{F})=1-P(F)=\frac{200-100}{200}=\frac{100}{200}$$
et enfin :
$$P(\overline{F\cup B})=1-P(F\cup B)=\frac{200-180}{200}=\frac{20}{200}$$

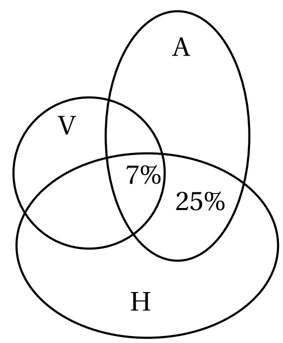
I.4. Calculer des probabilités et modélisation

I.4.a. Avec des diagrammes

Exercice 1. Une compagnie d'assurance analyse les contrats souscrits par ses clients. Voici les résultats :

- ⇝ 72% ont souscrit une assurance habitation ;
- ⇝ 54% ont souscrit une assurance auto ;
- ⇝ 30% ont souscrit une assurance vie ;
- ⇝ 7% ont souscrit les trois types d'assurance ;
- ⇝ 25% ont souscrit exactement une assurance auto et une assurance habitation ;
- ⇝ 31% ont souscrit uniquement une assurance habitation ;
- ⇝ 14% ont souscrit uniquement une assurance auto ;

On appelle H l'évènement : « l'assuré a souscrit une assurance habitation », V : « l'assuré a souscrit une assurance vie »et A : « l'assuré a souscrit une assurance auto »



1. Compléter le diagramme précédent.
2. La compagnie envoie un courrier à un assuré choisi au hasard. Calculer les probabilités suivantes :

$$A\cap V\cap H \quad ,A\cap V \quad ,A\cup H \quad ,\overline{H}\cap A \quad ,\overline{H}\cap\overline{V} \quad ,\overline{A\cup H} \quad ,\overline{A\cup V}$$

3. Décrire, à l'aide des lettres A, V et H les évènements suivants puis calculer la probabilité :
   (a) E :« l'assuré n'a pas souscrit d'assurance vie, mais il a souscrit une assurance habitation et une assurance auto »
   (b) F :« l'assuré a souscrit uniquement une assurance auto »

I.4.b. Avec un arbre

Exercice 2. Un processus aléatoire affiche l'un des nombres -1 ou $+1$ dans 4 cases successives d'un code.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   (a) la somme des nombres est nulle.
   (b) le produit des nombres vaut 1.
   (c) la suite des nombres est alternée.

Exercice 3. L'urne U1 contient deux boules vertes et trois boules rouges. L'urne U2 contient deux boules rouges et trois boules vertes. On tire une première boule de l'urne U1.

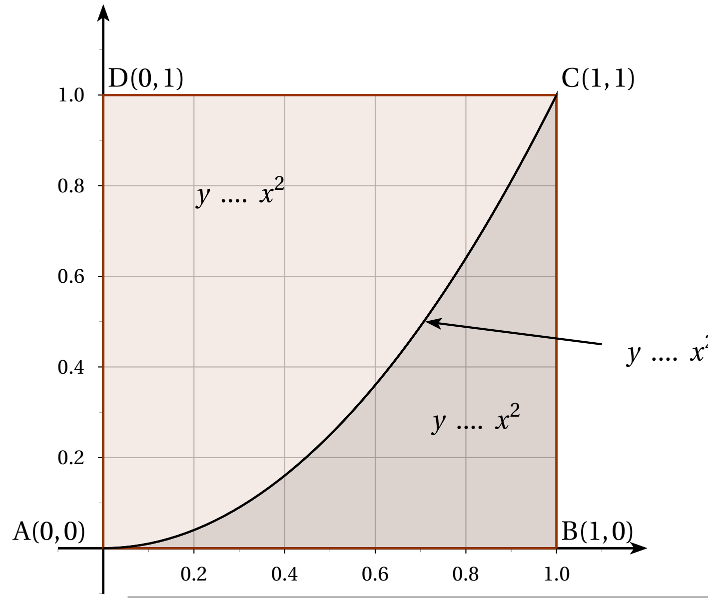
- ⇝ Si elle est rouge, on la remet dans cette urne, et on retire une boule de l'urne U1 .

⇝ Si elle est verte, on tire une boule de l'urne U2

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré
2. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule rouge suivie d'une verte.
3. Déterminer la probabilité d'un tirage mono colore

Exercice 1. La loi des Grands Nombres

Norbert, un élève syldave studieux, lance des fléchettes sur une cible carrée de côté 1. Il atteint toujours la cible (ie le carré de côté 1) mais comme il n'est pas très doué, il pense que sa probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.
Il s'intéresse à la probabilité d'atteindre la zone sous la parabole $y = x^2$. Malheureusement, il ne sait pas encore calculer cette aire (il l'apprendra l'an prochain en Terminale S).
Il cherche donc à l'estimer par l'expérience, et pour cela, il a rédigé l'algorithme ci-dessous.



1. Expliquer en quoi cet algorithme simule le lancer de fléchettes en détaillant ce que représentent X, Y, N, A et K.
2. Que représente l'affichage pour le problème de Norbert ?
3. En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, simuler 500 lancers et noter l'affichage en sortie.
4. Relancer votre programme plusieurs fois en notant les affichages successifs.
   Est-ce toujours les mêmes ? Pourquoi ?
5. Simuler 1 000 lancers et en déduire une valeur approchée de l'aire sous la parabole.

Remarque : Cette méthode s'appelle la méthode de Monte Carlo. On peut aussi l'utiliser pour trouver une valeur approchée de π.
Il suffit de considérer la courbe représentative de la fonction $y = \sqrt{1-x^2}$ sur $[0,1]$ qui dessine un quart de cercle dans un carré de côté 1. Cependant, il faut beaucoup de lancers pour obtenir une bonne approximation de π.

Algorithme 1 :

N est un entier naturel
X et Y sont des réels compris entre 0 et 1
A prend la valeur 0
Saisir N
Pour K allant de 1 à N **Faire**
  X prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
  Y prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
  Si ($Y > X^2$) **Alors**
    A prend la valeur A+1
  Sinon
    K prend la valeur K+1
  Fin Si
Fin Pour
Afficher $\dfrac{A}{N}$

Exercice 4. Alice arrive dans un square qui comporte deux bancs avec deux places chacun. Sur l'un deux il y a une personne (Bob) déjà installé ; l'autre est en revanche vide. Fatigué Alice s'installe en laissant le hasard la guider ; quelle est la probabilité qu'Alice s'installe à côté de Bob ?

I.5. Quelques exercices

Exercice 5.
Dans un univers Ω, on donne deux événements A et B incompatibles tels que $p(\mathrm{A}) = 0,2$ et $p(\mathrm{B}) = 0,7$.
Calculer $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$, $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$, $p(\overline{\mathrm{A}})$ et $p(\overline{\mathrm{B}})$.

Exercice 6. Les résultats au bac 2009 ont battu des records de réussite, voici quelques chiffres :

Séries	**Effectifs des reçus**	**Effectifs des filles reçues**	**Taux de réussite**
Littéraire	47 765	37 878	87.1
Economique	90 466	56 994	88.5
Scientifique	148 531	69 810	89.6
Total	286 762	164 682	88.8

1. On édite le diplôme d'un bachelier (fille ou garçon) de la session 2009. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'un bachelier scientifique ?
2. On édite le diplôme d'un bachelier de la session 2009 de la série économique. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'une bachelière ?
3. On édite le diplôme d'une bachelière de la session 2009. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'une bachelière littéraire ?

Exercice 7. On lance n dés ($n \geq 1$). On note A l'événement « obtenir au moins un 6 »

1. Décrire $\bar{\mathrm{A}}$ puis exprimer en fonction de n la probabilité $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})$
2. En déduire que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^6$
3. Compléter le tableau suivant :

gain n	1	2	3	4	5	6	7	8
P(A)								

4. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\dfrac{3}{4}$?

Exercice 8. On souhaite répondre à la question suivante : dans une même classe, y a-t-il plus d'une chance sur deux pour qu'au moins deux élèves de la classe aient la même date d'anniversaire ?
On considérera une classe de 30 élèves et, pour simplifier, on dira qu'une année comporte 365 jours.

1. Combien existe-t-il de listes différentes contenant 30 dates d'anniversaire (identiques ou non) ?
2. Notons A l'événement « au moins deux élèves de la classe ont la même date d'anniversaire ».
   (a) Exprimer en français l'événement $\overline{\mathrm{A}}$.
   (b) Quel est le nombre de cas favorables à $\overline{\mathrm{A}}$?
   (c) Répondre à la question posée en début d'exercice.

II. Variable aléatoire

II.1. Définition

Travail de l'élève : L'éducation coûte trop cher. Afin de réaliser des économies, le gouvernement syldave a décidé de se passer à la fois de correcteurs et d'élèves. Tout est simulé dans les bureaux du ministère, le but étant d'obtenir une moyenne nationale satisfaisante à présenter aux investisseurs étrangers qui se rueront en Syldavie pour profiter d'une main d'œuvre aussi qualifiée.
Le candidat virtuel jette un dé virtuel : s'il sort un 6, il a 20, s'il tombe sur un autre numéro pair il a 10, s'il tombe sur un numéro impair, il a 5.
Quelle moyenne nationale peut *espérer* obtenir le ministre ? Cette moyenne est-elle une moyenne ? Cette moyenne sera-t-elle effectivement atteinte ?

Les derniers syldaves touchant un salaire pour leur travail coûtent encore trop cher aux entreprises. Un nouveau système de rémunération a donc été mis au point par l'ancien ministre de l'éducation syldave installé aujourd'hui au ministère des finances.
Pour garder son emploi, le salarié doit chaque mois verser 1000 neurones à l'entreprise puis doit lancer un dé. S'il sort un 6, il touche 3000 neurones : les 1000 versés au départ par le salarié plus 2000 versés par l'entreprise. Dans les autres cas, l'entreprise garde les 1000 neurones.
Quelle salaire un employé peut-il espérer toucher ?
Que se passera-t-il si l'entreprise propose 5000 neurones au lieu des 2000 ? Et si elle propose 1 000 000 000 de neurones avec un dé à 100 faces pour un versement initial de 1 000 000 de neurones ?

Objectifs :

- ⇝ Introduire la notion de variable aléatoire, la présentation d'une loi de probabilité ...
- ⇝ Donner du sens à la notion d'espérance, critiquer la valeur trouvée (atteinte ou non, ce qu'elle n'indique pas ...)

Définition 4.

On appelle **variable aléatoire** toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, notée en général X.
Autrement dit, définir une variable aléatoire sur Ω c'est à associer un réel x_i à chaque éventualité ω_i.

Remarque : Soit x_i le réel associé à l'issue ω_i de l'univers. On note $(X = x_i)$ l'événement « la variable aléatoire X prend la valeur x_i »

Exemple :
On lance trois pièces de monnaie, que l'on numérote 1 ; 2 et 3. Le jeu qui consiste à gagner 1 € chaque fois que F apparaît et à perdre 1 € chaque fois que P apparaît
La fonction X qui, à chaque issue, associe le gain (positif ou négatif) correspondant, est une variable aléatoire sur Ω.

Définition 5. (Proposition (Admise))

La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est la fonction de $X(\Omega)$ dans $[0;1]$, qui à chaque $x_i \in X(\Omega)$ associe le nombre $P(X = x_i)$.

Remarques :

- Il s'agit bien d'une probabilité sur $X(\Omega)$.
- On représente cette loi à l'aide du tableau ci-dessous :

Valeurs x_i	x_1	x_2	...	x_m	Total
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_m	1

Nous utiliserons désormais toutes ces notations.

Exemple :

Dans l'exemple ci-dessus, la loi de probabilité du gain X est résumée dans le tableau suivant :

gain x_i	-3	-1	1	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

II.2. Paramètres : espérance et variance

Travail de l'élève : On reprend l'activité précédente sur les élèves de Syldavie.
Pour rentrer à l'université de Springfield, ils sont mis en compétition avec les élèves de Groland.
Cette université privilégie les élèves du pays au meilleur résultat moyen espéré et la sa régularité.
A Groland également, on a décidé de tirer les résultats du baccalauréat aux dés. Voici la règle : Lorsqu'on obtient 6 au dé, l'élève a 20. Un autre nombre pair fournit un 5 à l'élève. Ensuite s'il sort 1, l'élève a 0, s'il sort 3, l'élève a 10 et enfin, s'il sort 5, l'élève a 15.

1. Calculer la moyenne nationale que peut espérer obtenir Groland.
2. De quels moyens dispose-t-on pour comparer la régularité de chacun des pays ?

Objectifs :

- Réinvestir ce que les élèves viennent d'apprendre sur les variables aléatoires.
- Parler d'étendue, écart interquartile, écart à la moyenne (sans valeur absolue, avec) ... suivant leurs idées (recherche en groupe)
- Introduire le sens de la variance et de l'écart-type.

Définition 6.

L'espérance mathématique de X est le nombre E(X) définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \times p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i pi = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_m x_m$$

La variance de X est le nombre V(X) définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(X)]^2 pi = [x_1 - E(X)]^2 p_1 + \cdots + [x_m - E(X)]^2 p_m$$

L'écart-type de X est le nombre $\sigma(X)$ définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarques :

- On a choisi d'utiliser les carrés pour la variance de manière arbitraire pour ne pas avoir de problèmes de signes; on aurait pu choisir une autre méthode, mais celle-ci a l'avantage de rappeler la distance euclidienne bien connue. La variance est en ce sens homogène au carré d'une distance. L'écart-type définit donc une distance proprement dite.
- Lorsque X représente le gain du joueur à un jeu de hasard, $E(X)$ représente le gain moyen qu'il peut espérer par partie, lorsqu'on joue un grand nombre de fois. L'écart type est une caractéristique de la dispersion des valeurs de X, autrement dit, cela représente le risque du jeu.
- Vous pouvez obtenir ces valeurs très facilement à l'aide de vos calculatrices. Il suffit de rentrer les valeurs prises par la variable aléatoire en liste 1, et les probabilités en liste 2.

Exemples :

Dans l'exemple précédent et calculer l'espérance, la variance et l'écart-type. Interpréter vos résultats.
Mêmes questions pour les deux exemples de l'activité.

Propriété 3.

Notons $m = E(X)$. La variance de la variable aléatoire X se calcule plus facilement grâce à la formule :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 pi - m^2$$

Remarque : On note encore $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Preuve

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{m} \left(x_1 - E(X)\right)^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(x_i^2 - 2x_i E(X) + (E(X))^2\right) p_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i - 2E(X) \sum_{i=1}^{m} x_i p_i + \left(E(X)\right)^2 \sum_{i=1}^{m} p_i \end{aligned}$$

Preuve (Suite)

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i - 2E(X)E(X) + \left(E(X)\right)^2 \times 1 \\ &= E(X^2) - 2\left(E(X)\right)^2 + \left(E(X)\right)^2 \\ &= E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 \end{aligned}$$

Propriété 4.

Soients a et b deux réels.
L'espérance est linéaire : $E(aX + b) = aE(X) + b$
On en dédut la formule : $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Preuve

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) &= Card\big(ax_i+b\big)p_i = \sum_{i=1}^{m}\big(ax_ip_i+bp_i\big)\\
&= a\sum_{i=1}^{m}x_ip_i + b\sum_{i=1}^{m}p_i\\
&= a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) &= \sum_{i=1}^{m}\big(ax_i+b\big)^2pi - \big(\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b)\big)^2\\
&= \sum_{i=1}^{m}\big(a^2x_i^2+2abx_i+b^2\big)pi - \big(a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b\big)^2\\
&= \sum_{i=1}^{m}a^2x_i^2p_i + 2ab\sum_{i=1}^{m}x_ip_i + b^2\sum_{i=1}^{m}pi - \big(a^2\mathrm{E}^2(\mathrm{X})+2ab\mathrm{E}(\mathrm{X})+b^2\big)\\
&= a^2\sum_{i=1}^{m}x_i^2p_i + 2ab\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b^2 - a^2\mathrm{E}^2(\mathrm{X}) - 2ab\mathrm{E}(\mathrm{X}) - b^2\\
&= a^2\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2p_i - \mathrm{E}^2(\mathrm{X})\right)\\
&= a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

Exercice 9. **Challenge**

Combien y a-t-il de façons de choisir 2 délégués parmi les élèves de votre classe ?

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

David Hilbert, mathématicien