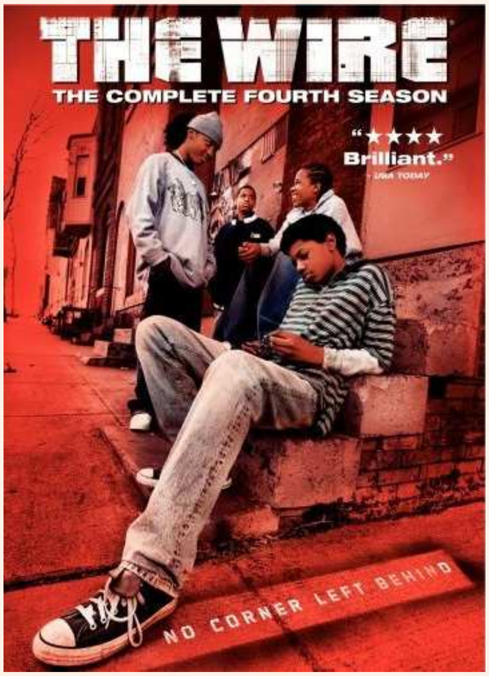
Chapitre 3

Trigonométrie

Hors Sujet



Titre : « The Wire »
Auteur : David Simon
Présentation succinte de l'auteur : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et Ed Burns.

Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.

Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.

Le tour de force de la série est de s'engager, sur le plan social, en montrant sans détour les pans les plus sombres du décor américain, son revers le plus inavouable, tout en mettant en scène une multitude de points de vue réalistes qui multiplient les questions dérangeantes sans jamais proposer de solution miracle. Il n'y a pas de fausse objectivité rassurante et pas de subjectivité accusatrice sous-jacente, l'épisode ne fait que montrer le plus passivement possible, il en résulte un étrange bourdonnement qui persiste longtemps après sa diffusion.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

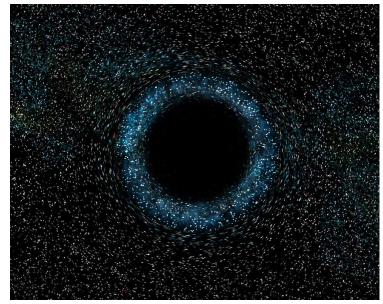
L'essentiel :

- ⇝ Se repérer sur le cercle trigonométrique
- ⇝ Déterminer la mesure principale d'un angle
- ⇝ Utiliser les notations d'angle de vecteurs
- ⇝ Connaître la définition du cosinus et du sinus d'un nombre réel
- ⇝ Connaître les valeurs du cosinus et sinus des angles remarquables
- ⇝ Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer des angles associés, leur cosinus et sinus, résoudre des (in)équations trigonométriques

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

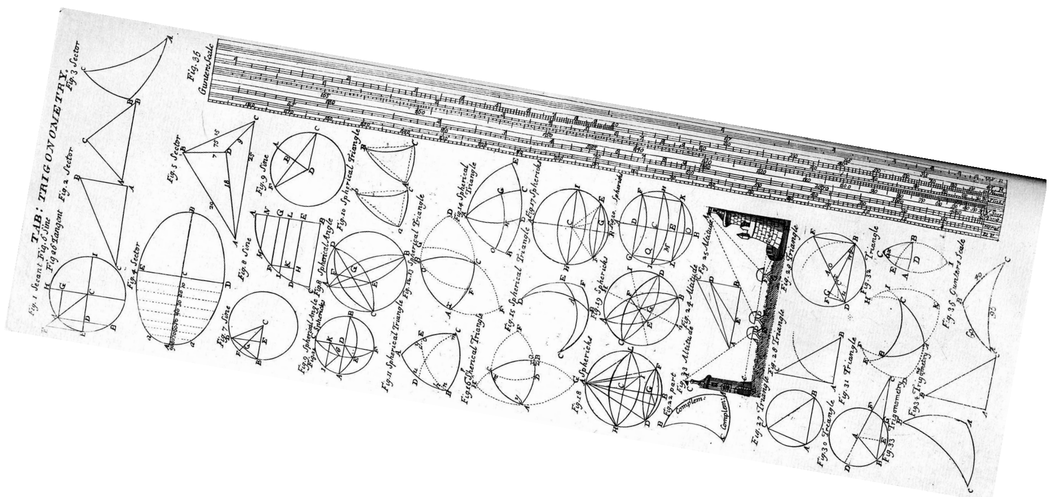
Leçon 3

Trigonométrie



Au fil du temps

Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d'Égypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de l'Indus, il y a plus de 4000 ans. Il semblerait que les Babyloniens aient basé la trigonométrie sur un système numérique à base 60. Lagadha (-1350 ; -1200) est le premier mathématicien à utiliser la géométrie et la trigonométrie pour l'astronomie. La plupart de ses travaux sont aujourd'hui détruits. La première utilisation de sinus apparaît dans les sulba Sutras en Inde, entre 800 et 500 avant J.C., où le sinus de $\frac{\pi}{4}$ est correctement calculé comme $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dans un problème de construction d'un cercle de même aire qu'un carré donné (le contraire de la quadrature du cercle).



Lorsque qu'on cherche une rue sur un plan de ville, on repère le rectangle où se trouve cette rue grâce à une lettre qui définit une colonne et un nombre qui définit une ligne du quadrillage sur le plan. Les marins ou les géographes repèrent un point sur la Terre grâce à sa longitude et sa latitude. Les astronomes ont besoin, eux, de trois mesures pour repérer un objet spatial, par exemple deux angles définissant une direction et une distance caractérisant l'éloignement de l'objet sur la direction. Le repérage est donc indispensable dès lors qu'on cherche à définir la position d'un objet dans un espace. Les repères que nous avons utilisé jusqu'à présent sont dit cartésiens, adjectif créé en hommage à Descartes (1596 - 1650) mathématicien et philosophe français qui inventa en même temps que Fermat (1601 - 1665) mais indépendamment de lui, le système de coordonnées que nous utilisons couramment. Les repères cartésiens utilisés jusqu'à présent permettent de positionner des points dans un plan. Ils peuvent être complétés par une troisième coordonnée permettant de se repérer dans l'espace à trois dimensions. Ces repères ne sont pourtant pas les seuls permettant de positionner des objets, nous allons découvrir dans ce chapitre comment se repérer sur un plan avec un angle et un rayon : grâce aux coordonnées polaires.

I. Le cercle trigonométrique

I.1. Découper une tarte en trois

Objectifs : Introduire le cercle trigonométrique et les angles orientés.

Exercice 1. L

a maman de Norbert a fait une tarte aux pommes. Elle lui demande de la découper en 6 parts égales. Il ne dispose que d'un couteau et d'un bout de ficelle.

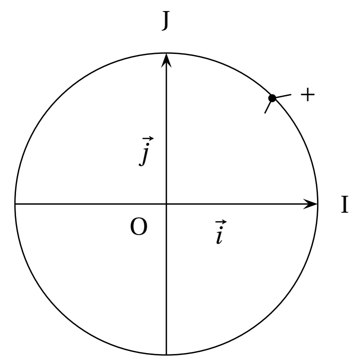
- Lui proposer une méthode sur un schéma en utilisant une règle sans ses graduations (pour modéliser son couteau) et au compas (l'écart entre les deux points modélisant le bout de ficelle tendu).
- Proposer une méthode (ou trois ?) pour décrire la position des points du bord de la tarte où Norbert doit effectuer ses découpes.

En général, les élèves trouvent une solution en faisant une rosace. Dans ce cas, il faut prendre le temps de démontrer pourquoi cela a l'effet voulu.
La description des positions des points sur le cercle permet d'introduire le ***cercle trigonométrique*** *et l'orientation des angles. On peut également évoquer la* ***longueur d'arc*** *ainsi que les* ***coordonnées*** *dans un repère orthonormé associé au cercle.*

Une unité de longueur est choisie dans le plan pour tout le chapitre.

Définition 1.

Un **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1, muni d'un sens de rotation, sur lequel est fixé un point « d'origine ». Le sens de rotation **positif** (ou **direct**) est le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Remarque : Le sens d'orientation du cercle nous permet désormais d'orienter les longueurs d'arcs ainsi que les angles. L'angle orienté $\widehat{IOA}$ « allant de I vers A »sera désormais noté $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$ (notation qui indique l'orientation « $\overrightarrow{OI}$ vers $\overrightarrow{OA}$ »). Celui allant de A vers I sera donc noté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}\right)$

Exemples :

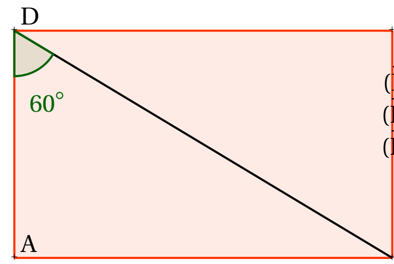
- Dessiner des angles tels que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=45°$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)=-60°$
- On a la figure suivante, où ABCD est un rectangle direct tel que $\widehat{ADB}=60°$

Angles géométriques

$\widehat{ADB}=\widehat{BDA}=60°$

$\widehat{ADC}=\widehat{CDA}=90°$

$\widehat{BDC}=\widehat{CDB}=30°$



Angles orientés

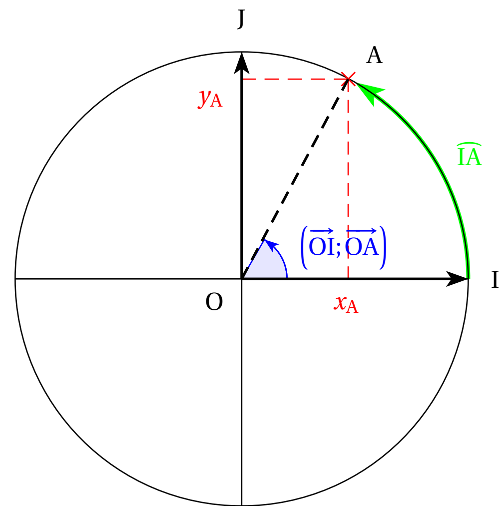
$(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA})=-60°$ et $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})=60°$
$(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})=-90°$ et $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})=90°$
$(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})=30°$ et $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})=-30°$

Donner des mesures des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})$; $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD})$

Pour tout le chapitre, on utilisera les éléments de la figure ci-dessus. Ainsi :

- on note O le centre d'un cercle trigonométrique, I son point d'origine (disposé comme sur la figure) et $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$
- on note J le point du cercle tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)=+90°$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$
- on munit ainsi le cercle du repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ ci-dessus (donc d'unité graphique 1)

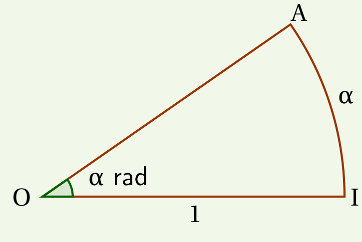
Soit A un point du cercle trigonométrique.
L'objectif de cette partie est de rappeler les liens entre les mesures de l'angle $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$ en degré, la longueur des arcs orientés reliant I à A, et les coordonnées du point A dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



I.2. Le radian

Définition 2.

Soit A un point du cercle trigonométrique.
On appelle **mesure en radian de l'angle** $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$ la longueur de tout arc orienté reliant I à A.



Exemple :

- Quel est le périmètre d'un cercle trigonométrique ? d'un demi-cercle ?
- Donner plusieurs mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$.
- A quelle mesure en radian correspondait un découpage de demi-tarte en 3 par Norbert ?
- A combien de parts correspond le découpage d'une demi-tarte d'angle d'ouverture chacune $\frac{\pi}{4}$? $\frac{\pi}{6}$? $\frac{\pi}{8}$?
  Construire tous ces découpages à la règle et au compas (rappels sur les bissectrices).
- Dessiner un cercle trigonométrique et placer les points A_i sur ce cercle tels que :

$$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_1}\right)=\frac{\pi}{4},\qquad \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_2}\right)=-\frac{\pi}{4},\qquad \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_3}\right)=\frac{3\pi}{4},\qquad \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_4}\right)=-\frac{3\pi}{4}$$

- Sur ce même cercle, placer B_i tel que

$$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{15\pi}{4}\qquad \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB_2}\right)=-\frac{15\pi}{4},\qquad \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB_3}\right)=-\frac{3606\pi}{4}$$

- A quels angles en degré cela correspond-il à chaque fois ?
  Présenter les résultats sous forme d'un tableau
- Que remarquez-vous ?
  Proportionalité, correspondance avec les angles dans le sens négatif, non unicité de la mesure

Remarque : Il n'y a pas unicité de la mesure en radians d'un angle orienté.
En général, on donnera la mesure d'un angle comprise entre $-\pi$ et π (celle-ci est unique).
Elle s'appelle la **mesure principale** de l'angle.
Donner les mesures principales des angles $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB_i}\right)$ précédents.
Introduire la notation $[2\pi]$

Propriété 1.

Les mesures d'angles en degrés et en radians sont proportionnelles.

Preuve

Les longueurs d'arc sont proportionnelles aux angles en degrés.

Exemples :

Le périmètre de $\mathscr{C}$ valant 2π, on en déduit facilement qu'un angle plat mesure π radians ; un angle droit $\frac{\pi}{2}$ rad.
Avec le tableau de proportionnalité suivant, on trouve convertit n'importe quelle mesure.

Mesure en degrés	180	d
Mesure en radians	π	α

Ainsi pour convertir 60° en radian on calcule $\alpha=\frac{60\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$ rad.

Pour convertir $\frac{5\pi}{6}$ rad en degré, on calcule $d=\frac{\frac{5\pi}{6}\times 180}{\pi}=\frac{5\times 180}{6}=5\times 30=150°$
Ou encore on remplace π par 180 dans la mesure d'angle ...

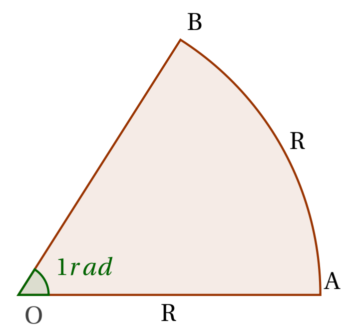
Correspondance degré-Radian

Degrés	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Remarques :

⇝ Au collège, le degré comme unité d'angle convenait parfaitement, même pour la trigonométrie (dans un triangle rectangle). Mais pour mettre en oeuvre des notions qui seront abordées dans les classes ultérieures, il est plus pratique d'utiliser désormais le radian.

⇝ Cette définition ne dépend pas de l'unité de longueur choisie. En fait, dans un cercle de rayon R, 1 radian est la mesure d'un angle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon R.

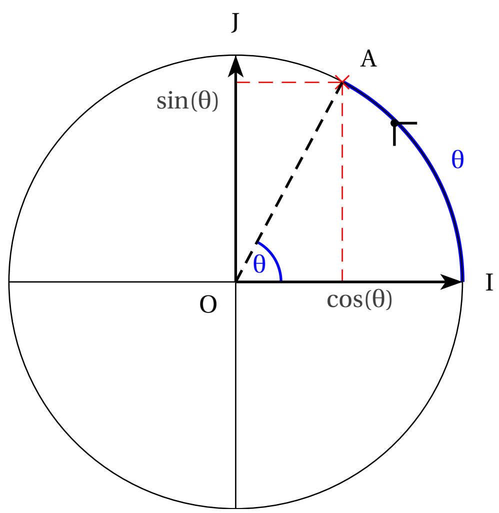


I.3. Trigonométrie

Définition 3.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et A le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right) = \theta$.

On appelle **cosinus** de θ, noté $\cos(\theta)$ l'abscisse de A dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.
On appelle **sinus** de θ, noté $\sin(\theta)$ son ordonnée dans le même repère.



Remarque : On vérifie aisément que cet définition coïncide avec celle donnée dans le triangle rectangle pour un angle θ tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Exemple :

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $J(0;1)$ dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.
Donc $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

I.4. Valeurs remarquables

Le tableau ci-dessous rappelle les valeurs remarquables du cosinus et du sinus pour des valeurs particulières d'un angle orienté θ (en radians). Il est connaître par coeur.

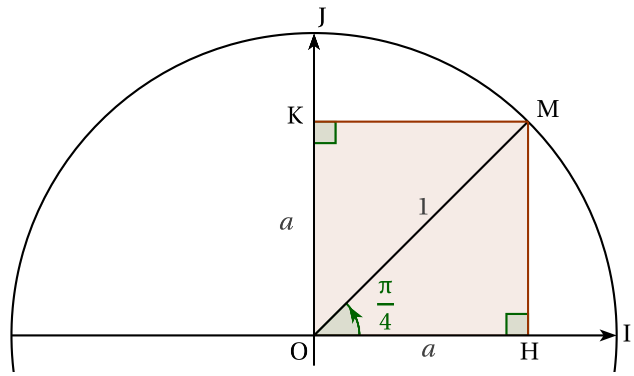
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Preuve

Pour calculer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et de $\cos\frac{\pi}{4}$ on se place dans le quadrilatère OHMK ci-contre, de diagonale $\mathrm{OM}=1$.

On sait que OHMK est un carré, car il possède 4 angles droits et que l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{OH}};\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ mesure $\frac{\pi}{4}$.
On appelle a la mesure de son côté.

Par définition du cosinus et sinus d'un nombre réel, on a $a=\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$. Cherchons cette valeur.



Dans le triangle OHM rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

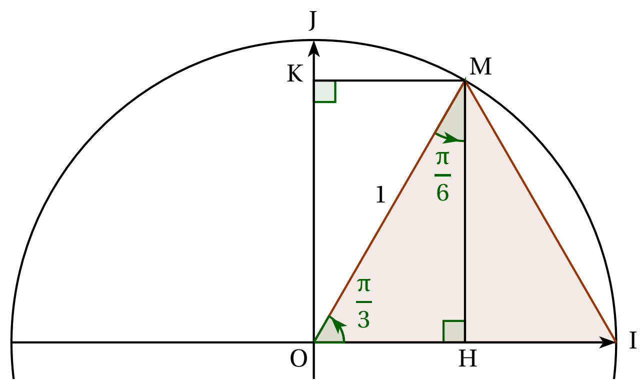
$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{MH}^2 \iff 1^2=2a^2+a^2 \iff a^2=\frac{1}{2} \overset{a>0}{\iff} a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $\boxed{\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Pour calculer les valeurs du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on se place dans le triangle OIM ci-contre, de côté $\mathrm{OM}=1$.

On cherche $\mathrm{OH}=\cos\frac{\pi}{3}$ et $\mathrm{OK}=\sin\frac{\pi}{3}$.

On sait que le triangle OIM est équilatéral car $\mathrm{OM}=\mathrm{OI}$ et que $(\overrightarrow{\mathrm{OH}};\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ mesure $\frac{\pi}{3}$.



Donc sa hauteur [MH] est aussi sa médiane. D'où H est le milieu de [OI] et $\mathrm{OH}=\boxed{\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}}$.
De plus, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H on a :

$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{MH}^2 \iff 1^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\mathrm{OK}^2 \iff \mathrm{OK}^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \overset{\mathrm{OK}>0}{\iff} \mathrm{OK}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\boxed{\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

De plus la hauteur [MH] du triangle OIM est aussi sa bissectrice donc $(\overrightarrow{\mathrm{MO}};\overrightarrow{\mathrm{MI}})=\frac{\pi}{6}\quad[2\pi]$.

On en déduit dans le triangle OHM rectangle en H que $\boxed{\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{OM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}}$

I.5. Mesure principale

Un angle admet, en radians, une infinité de mesure. Si par exemple la mesure d'un angle vaut x radians, toutes les autres mesures s'obtiennent en ajoutant ou en soustrayant un certains nombres de « tours ». Tout autre mesure de notre angle est donc de la forme :

$$x+2k\pi \qquad \text{avec } k\in\mathbb{Z}$$

En revanche dans l'intervalle $[0;2\pi[$ ou encore dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ tout angle admet une unique mesure ; d'une manière générale dans un intervalle de longueur 2π (la longueur d'un intervalle étant la différence entre les deux bornes) tout angle admet une unique mesure.

Définition 4.

On appelle mesure principale d'un angle en radians l'unique mesure de cet angle comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Exemple :

- Si $\alpha = \frac{13\pi}{3}$ rad. Déterminons sa mesure principale. Puisque :

$$4 < \frac{13}{3} < 5 \iff 4\pi < \frac{13\pi}{3} < 5\pi$$

On enlève 2 tours, c'est-à-dire 4π et on obtient :

$$4\pi - 4\pi < \frac{13\pi}{3} - 4\pi < 5\pi - 4\pi \iff 0 < \frac{\pi}{3} < \pi$$

La mesure principale de α est $\frac{\pi}{3}$.

- Si $\alpha = -\frac{33\pi}{6}$ rad. Déterminons sa mesure principale. Puisque :

$$-7 < -\frac{37}{6} < -6 \iff -7\pi < -\frac{37\pi}{6} < -6\pi$$

On ajoute 3 tours, c'est-à-dire 6π et on obtient :

$$-7\pi + 6\pi < -\frac{37\pi}{6} + 6\pi < -6\pi + 6\pi \iff -\pi < -\frac{\pi}{6} < 0$$

La mesure principale de α est $-\frac{\pi}{6}$.

- Si $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ alors puisque $0 < \frac{3}{8} < 1$ il suit que $0\frac{3\pi}{8} < \pi$ et donc la mesure principale de α est simplement $\frac{3\pi}{8}$

Exercice 1 : Dans chacun des cas, dire si les deux réels donnés sont les mesures en raidans d'un même angle de vecteurs.

$\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $-\frac{17\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\frac{2011\pi}{6}$ et $\frac{4023\pi}{6}$

Exercice 2 : Déterminer la mesure principale des angles suivants, puis placer les points correspondants sur le cercle trigonométrique :

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right) = \frac{13\pi}{3}$ $\qquad$ $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right) = -\frac{31\pi}{4}$ $\qquad$ $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right) = \frac{2014\pi}{6}$ $\qquad$ $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}\right) = -\frac{4023\pi}{8}$

I.6. Propriété élémentaires du sinus et du cosinus

Propriété 2.

Pour tout nombre réel θ on a :

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(\theta) \leq 1$$

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta) \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Preuve

Les deux premières sont immédiates avec la définition.
La dernière utilise le théorème de Pythagore.

Exemple :

On donne $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. On cherche la valeur de $\sin\frac{\pi}{12}$.

On sait que $\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12} = 1 \iff \sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ Donc

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{16-8-2\times 2\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

De plus $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\frac{\pi}{12} > 0$. On en déduit :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

On peut également montrer que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ est une autre écriture du sinus, plus simple .

II. Equations trigonométriques

II.1. Angles associés

Regarder les angles associés à $\dfrac{\pi}{3}$

Propriété 3.

$\forall\theta \in \mathbb{R}$ on a :

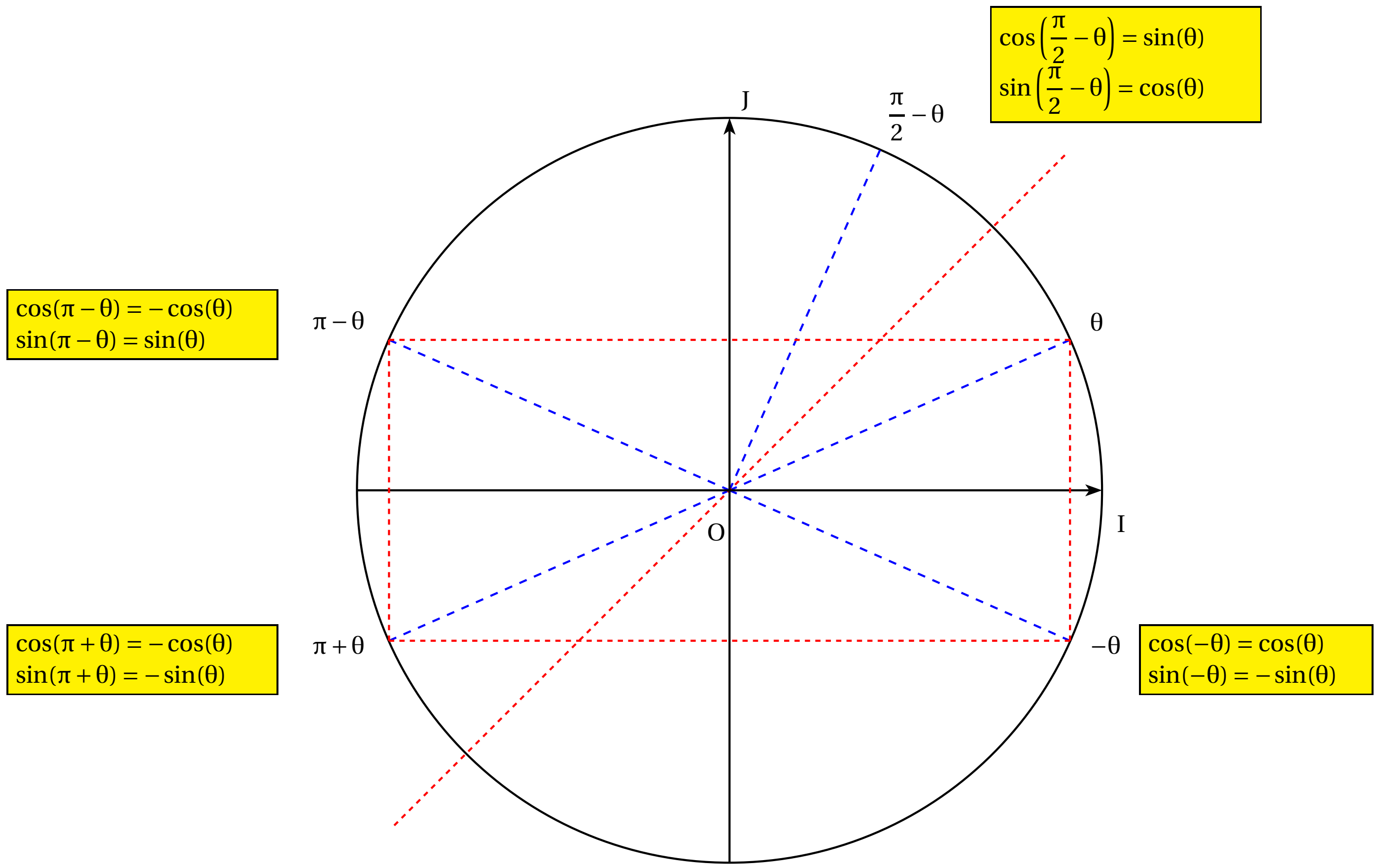
1. $\cos\theta = \cos(-\theta)$
2. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
3. $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
4. $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
5. $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$
6. $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$
7. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$
8. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$
9. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$
10. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$

Preuve

On obtient cette propriété par une lecture astucieuse du cercle trigonométrique : Soit A le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=\theta$. Dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ on a $A(\cos(\theta);\sin(\theta))$.

Grâce à de nombreuses propriétés de symétrie sur un cercle, on peut déduire les coordonnées des points associés aux réels $-\theta$, $\pi-\theta$, $\pi+\theta$, $\frac{\pi}{2}-\theta$ et $\frac{\pi}{2}+\theta$ (donc la valeur de leur cosinus et sinus).

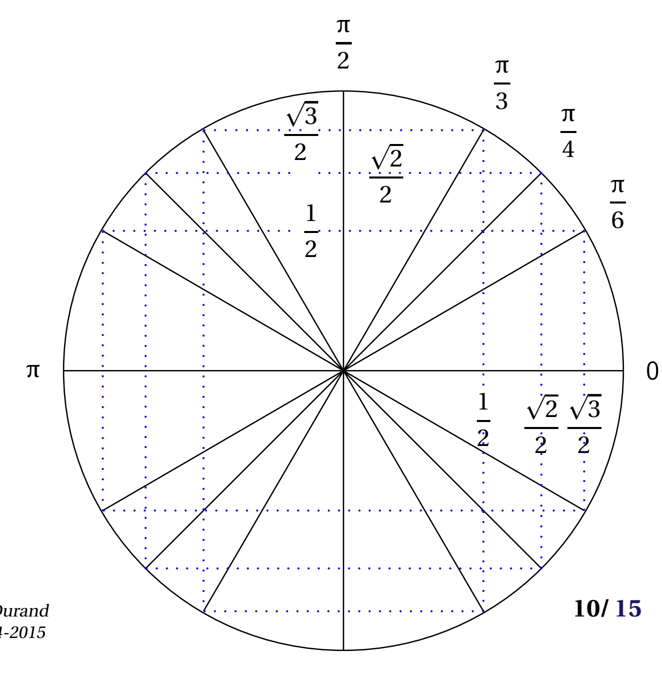
Sur le schéma ci-dessous, ces points permettent de définir ce que l'on appelle des angles associés.



Exemple :

Grâce aux angles associés, trouver les valeurs des cosinus et sinus des angles suivants :

$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$



Exemple :

Simplifier les expressions suivantes : $A = \cos(-\pi - \theta)$, $B = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$, $C = \cos^2(-\theta) + \sin^2(\pi - \theta)$

Exercice 3 : A l'aide des propriétés sur les angles associés, donner les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) \qquad \sin\left(-\frac{18\pi}{4}\right) \qquad \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \qquad \cos\left(\frac{35\pi}{4}\right)$$

Exercice 4 : Sachant que $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 5 : Exprimer à l'aide de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ les expressions suivantes :

- $A = \cos(x+\pi) - \cos(-x) + 5\cos(x)$
- $B = \sin(\pi - x) + 2\sin(x+2\pi) + \sin(x+3\pi)$
- $C = \sin(\pi + x)\cos(\pi - x) - \sin(\pi - x)\cos(\pi + x)$
- $D = \sin(x + 11\pi) + \sin(11\pi - x) - \cos(11\pi - x)$

Exercice 6 : Soit $a = \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$. Exprimer en fonction de a :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) \qquad \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) \qquad \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) \qquad \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

Exercice 7 : Sachant que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$:

1. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$
2. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$

Exercice 8 : Sachant que $\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$:

1. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)$
2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

Exercice(s) du livre : n° 75 p 291

II.2. Equations trigonométriques

Travail de l'élève :

Partie A : Equation $\cos x = a$

1. Soit l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ à résoudre dans $\mathbb{R}$.
   (a) Placer sur le cercle trigonométrique les points M et M' d'abscisse $\dfrac{1}{2}$
   (b) Déterminer les mesures principales des angles $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'})$.
   En déduire l'ensemble des solutions dans $]-\pi;\pi]$ de l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation.

2. (a) Par une méthode analogue, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   (b) En déduire les solutions dans $[0;2\pi[$ de cette équation.
3. (a) Examiner le cas des équations $\cos x = 1.5$ et $\cos x = -3$.
   (b) Donner une condition sur a pour que l'équation $\cos x = a$ puisse admettre des solutions.
4. Soit l'équation $\cos x = 0.25$.
   (a) Sur le cercle trigonométrique, placer les images des solutions de l'équation.
   (b) On note θ la solution de cette équation dans $[0;\pi[$.
   Exprimer en fonction de θ les solutions de l'équation $\cos x = 0.25$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Résoudre cette équation dans $[0;2\pi[$.
   Donner, à l'aide de la calculatrice des valeurs approchées de ces solutions à 10^{-4} près.

Partie B : Equation $\sin x = a$

1. En suivant la même méthode que dans la partie A, résoudre l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.
2. Même question pour $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donner ensuite les solutions de cette équation dans $[0;2\pi[$.
3. Soit l'équation $\sin x = 0.3$. On note α la solution de cette équation dans $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Exprimer en fonction de α les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = 0.3$.

Le cercle trigonométrique et la configuration des angles associés nous permettent de résoudre des équations du type $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$ où a est un réel connu.

Propriété 4.

L'équation $\cos x = \cos a$ où $a \in \mathbb{R}$ admet pour solutions les nombres réels $x = a + 2k\pi$ et $x = -a + 2k'\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs.
L'équation $\sin x = \sin a$ où $a \in \mathbb{R}$ admet pour solutions les nombres réels $x = a + 2k\pi$ et $x = \pi - a + 2k'\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs.

Exemple :

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ et enfin dans $[0;2\pi[$ les équations suivantes :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin x = -\frac{1}{2} \qquad \cos(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \qquad \cos(2x) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 9 :

1. Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels t de $]-\pi;\pi]$ tels que $\cos(t) = -\dfrac{1}{2}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(t) = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(x) = -1$
4. $\sin(x) = 0$

Dans chaque cas, donner les solutions de l'intervalle $[2\pi;5\pi[$

Exercice 11 : À l'aide d'une figure, résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in [0;2\pi[$
2. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [-\pi;\pi[$
3. $\cos(x) \geq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [-\pi;\pi[$
4. $\sin(x) < \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [0;2\pi[$

Exercice 12 : Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels t de $]-\pi;\pi]$ puis ceux de $[0;2\pi[$ tels que

1. $-\dfrac{1}{2} \leq \sin(t) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos(t) \leq 0$
3. $1 - 2\sin(t) > 0$

Exercice 13 : On considère l'équation (E) : $\sin x = \cos \dfrac{\pi}{3}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)
2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E)

Exercice 14 : QCM (plusieurs réponses possibles)

1. Soit $x \in [\pi;2\pi]$ tel que $\cos(x) = -\dfrac{4}{5}$. Alors on a :

$$\sin(x) \leq 0 \qquad \sin^2(x) = \frac{1}{5} \qquad \sin(x) = 0.6 \qquad \sin(x) = -\frac{3}{5}$$

2. Soit $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \dfrac{21}{29}$. Alors on a :

$$\cos(x) \leq 0 \qquad \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} \qquad \cos(x) = -\frac{20}{29} \qquad \cos(x) = \frac{20}{29}$$

3. Soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \dfrac{1}{4}$. Alors on a :

$$\cos(x) \leq 0 \qquad \cos(x) = \frac{3}{4} \qquad \cos(x) = -\frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \cos(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

4. Sur l'intervalle $[0;2\pi]$, les solutions de l'inéquations $\cos(x) \geq -\dfrac{1}{2}$ sont :

$$\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right] \qquad \left[-\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right] \qquad \left[\frac{4\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right] \qquad \left[0;\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3};2\pi\right]$$

5. Les solutions réelles de l'équation $\cos(x) = \sin\dfrac{\pi}{5}$ sont :

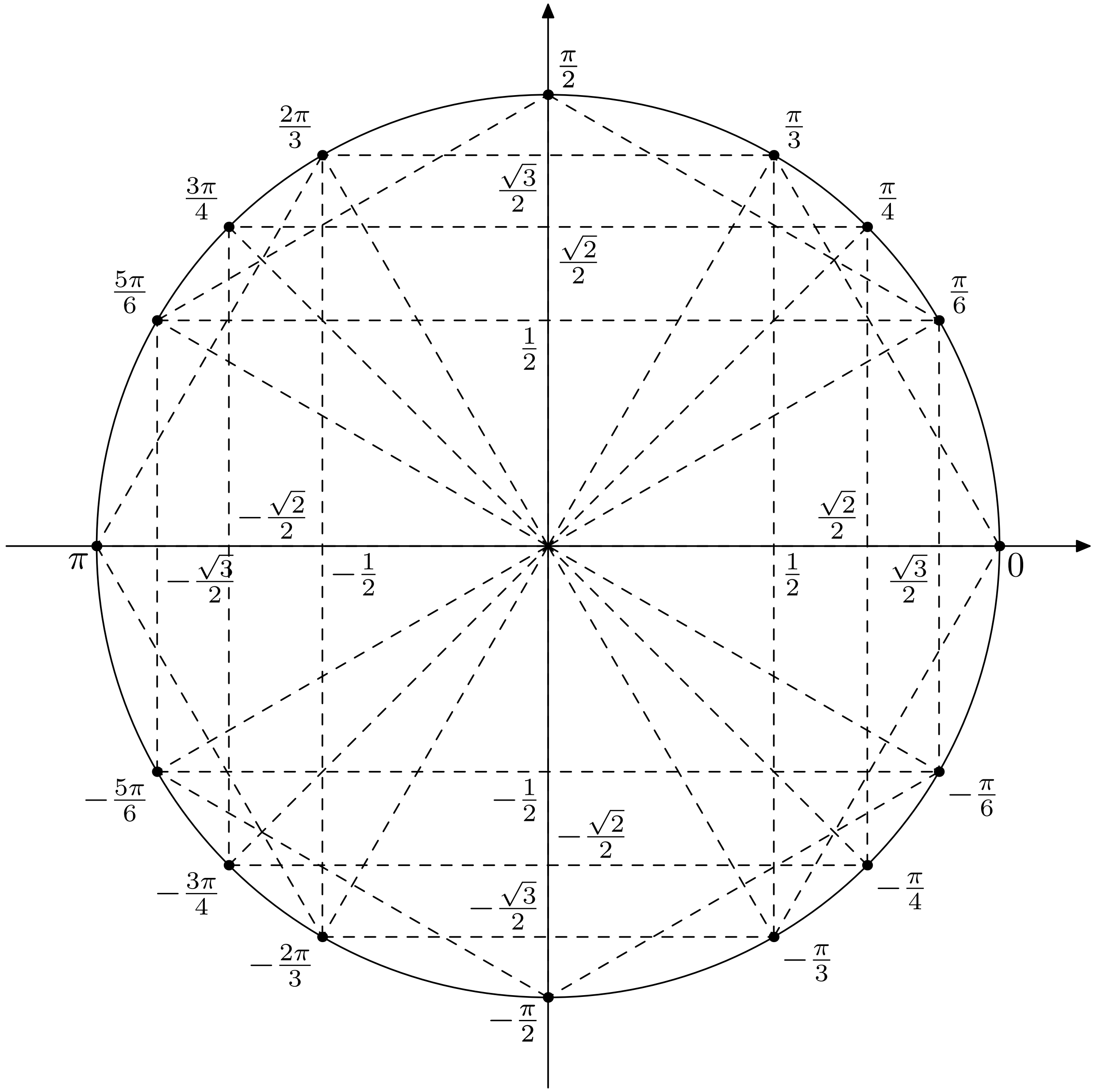
$$\left\{\frac{\pi}{5}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{5}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \left\{\frac{3\pi}{10}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{3\pi}{10}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \left\{\frac{3\pi}{10}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{10}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \{$$

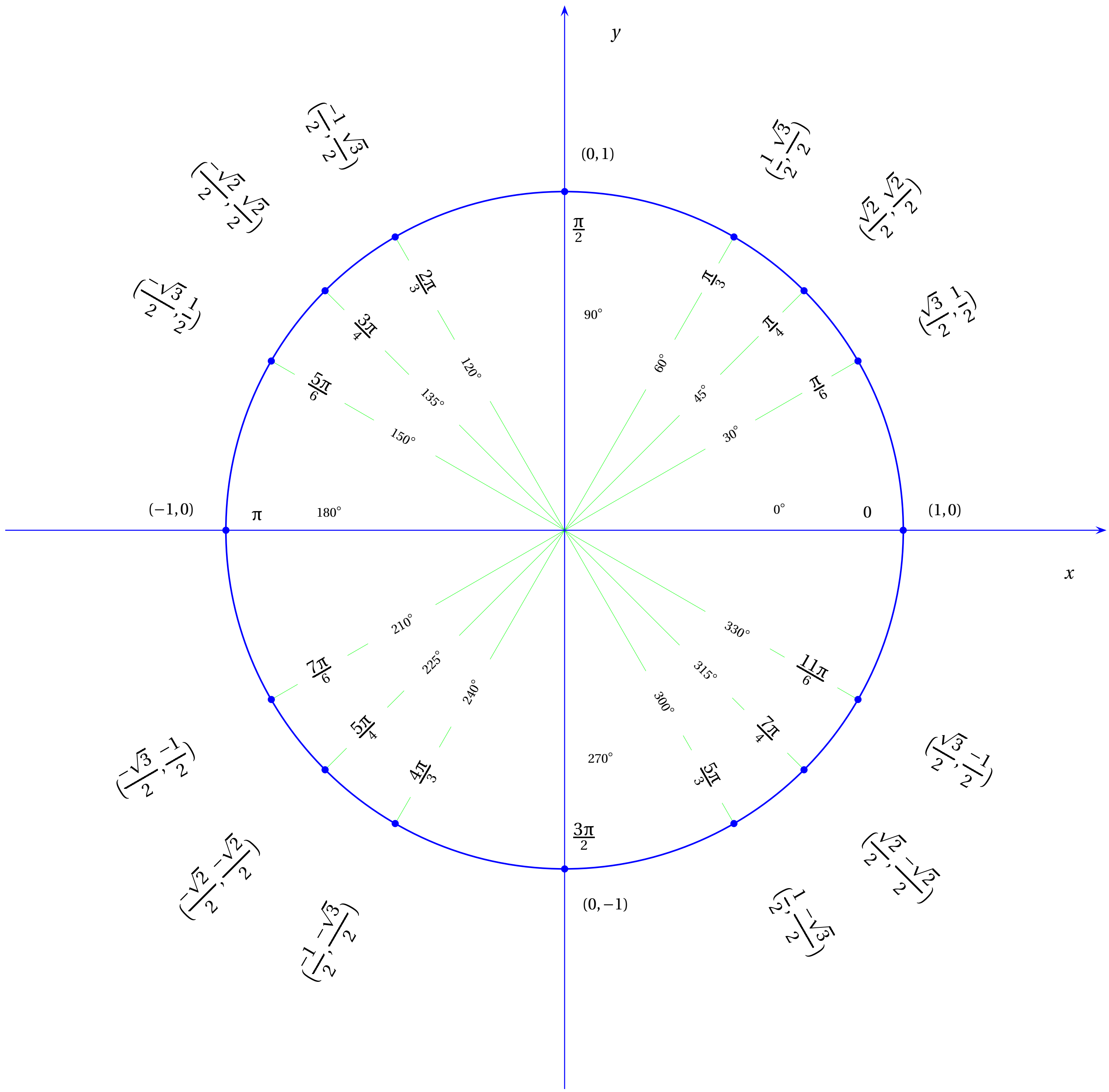
Exercice(s) du livre : n° 113-131-133-134 p 295

III. Angles orientés - Propriétés

IV. Résumé du cercle trigonométrique

Voici deux cercles trigonométriques qui résument l'essentiel :


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π
0
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$


y
x
(0,1)
(0,−1)
(1,0)
(−1,0)
0
π
π/2
3π/2
π/6
π/4
π/3
2π/3
3π/4
5π/6
7π/6
5π/4
4π/3
5π/3
7π/4
11π/6
0°
30°
45°
60°
90°
120°
135°
150°
180°
210°
225°
240°
270°
300°
315°
330°
(√3/2, 1/2)
(√2/2, √2/2)
(1/2, √3/2)
(−1/2, √3/2)
(−√2/2, √2/2)
(−√3/2, 1/2)
(−√3/2, −1/2)
(−√2/2, −√2/2)
(−1/2, −√3/2)
(1/2, −√3/2)
(√2/2, −√2/2)
(√3/2, −1/2)