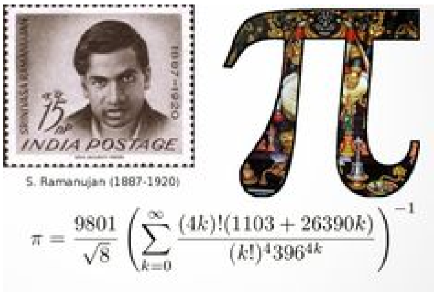


Loi Binomiale

Cours et Applications

Par *D. Zancanaro*

« Déjà essayé. Déjà échoué. Peu importe. Essaie encore. Échoue encore. Échoue mieux. »
Samuel Beckett

1 Schéma de Bernoulli

1.1 Epreuve et Loi de Bernoulli

Definition 1. Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui comporte deux issues. L'une représente un succès, l'autre un échec.

Exemple. Si on lance une pièce de monnaie une fois alors il s'agit d'une épreuve de Bernoulli puisqu'il n'y a que deux issues : Pile et Face.
On tire au hasard une boule dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules noires. On considère comme un succès le fait de tirer une boule noire. Cette expérience est une épreuve de Bernoulli puisqu'il n'y a que deux issues, tirer une boule noire ou pas.

Propriété 1. *Considérons une épreuve de Bernoulli et notons X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. La loi de la variable aléatoire X est donné par le tableau suivant :*

k	0	1	*Total*
$P(X=k)$	$1-p$	p	1

où p désigne la probabilité de succès dans cet épreuve.
On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1;p)$

Exemple. Si on lance une pièce de monnaie une fois, si Face représente le succès alors la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, loi donné par le tableau suivant :

k	0	1	Total
$P(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

On tire au hasard une boule dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules noires. On considère comme un succès le fait de tirer une boule noire et note X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès. $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(1;\frac{3}{10}\right)$, loi résumé par le tableau suivant :

k	0	1	Total
$P(X=k)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Propriété 2. *Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1;p)$ alors $E(X)=p$ et $V(X)=p(1-p)$*

Preuve. La loi de X est résumé par le tableau

k	0	1	Total
$P(X=k)$	$1-p$	p	1

donc

$$E(X) = 0\times(1-p)+1\times p = p$$

De plus $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$. On a $E(X)^2=p^2$, on trouve $E(X^2)$ grâce au tableau suivant :

k^2	$0^2=0$	$1^2=1$	Total
$P(X=k^2)$	$1-p$	p	1

Donc $E(X^2) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$ d'où, au final :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$\square$

Exemple. En reprenant les deux contextes précédent, $E(X) = \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ dans le cas du lancer d'une pièce de monnaie.

Dans le second cas $E(X) = \frac{3}{10}$ et $V(X) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{100}$.

2 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

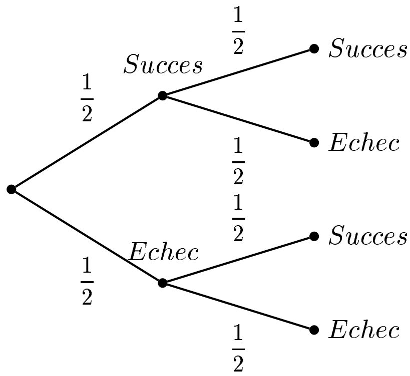
2.1 Définition

Definition 2. On appelle schéma de Bernoulli de paramètres n et p toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Si X compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli, on dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$

Exemple. Si on lance une pièce de monnaie deux fois successivement et si Face représente un succès, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre 2 et $\frac{1}{2}$.

Déterminons précisément cette loi. Pour ce faire, schématisons la situation à l'aide de probabilité.



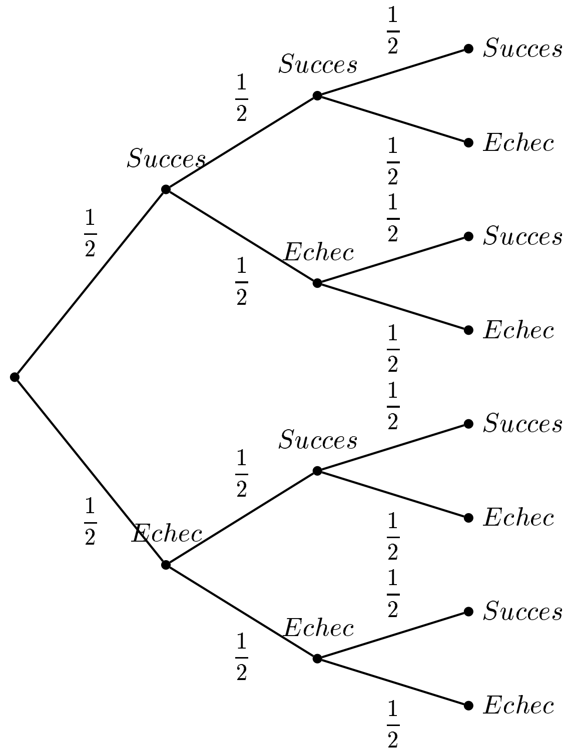
Chaque chemin a pour probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Il y a un seul chemin qui comporte 0 succès, ainsi $P(X=0) = \frac{1}{4}$. Il y a deux chemins qui comporte 1 succès, ainsi $P(X=1) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ et enfin il y a un chemin qui comporte 2 succès, ainsi $P(X=2) = \frac{1}{4}$.

La loi de X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	Total
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

On aimerait généraliser la méthode lorsque n augmente. Observons ce qui se passe si on lance 3 fois une pièce de monnaie. Dans ce cas $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left((3; \frac{1}{2}\right)$

Voici l'arbre qui correspond à $n = 3$:



Chaque chemin a pour probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$P(X = 0) = \frac{1}{8}$ puisqu'il n'y a qu'un chemin avec trois échecs.

$P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ puisqu'il y a trois chemins avec un succès exactement.

$P(X = 2) = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ puisqu'il y a trois chemins avec deux succès exactement.

$P(X = 3) = \frac{1}{8}$ puisqu'il n'y a qu'un chemin avec trois succès.

La loi de X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	Total
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

2.2 Coefficient Binomiaux

Definition 3. Dans un schéma de Bernoulli de paramètre n et p, le nombre de chemin (dans l'arbre représentant la situation) comportant exactement k succès est noté $\binom{n}{k}$ (On lit k parmi n). Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux.

Exemple. D'après l'exemple précédent pour $n = 2$: $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ et $\binom{2}{2} = 1$.

puis pour $n = 3$: $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$.

On peut expliquer $\binom{3}{1}$ à l'aide des coefficients binomiaux calculés pour $n = 2$.

On cherche le nombre de chemin comportant exactement 1 si on effectue trois épreuve de Bernoulli.

Si la première épreuve est un succès alors les deux suivantes doivent être des échecs et il y a $\binom{2}{0}$ chemin dans l'arbre correspond.

Si la première épreuve est un échec alors il doit y avoir exactement un succès parmi les deux suivantes et il y a $\binom{2}{1}$ chemins dans l'arbre correspond.

On vient de démontrer que :

$$\binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1}$$

De même

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$$

Ce raisonnement se généralise :

Théorème 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et k un entier compris entre 0 et n. On a :*

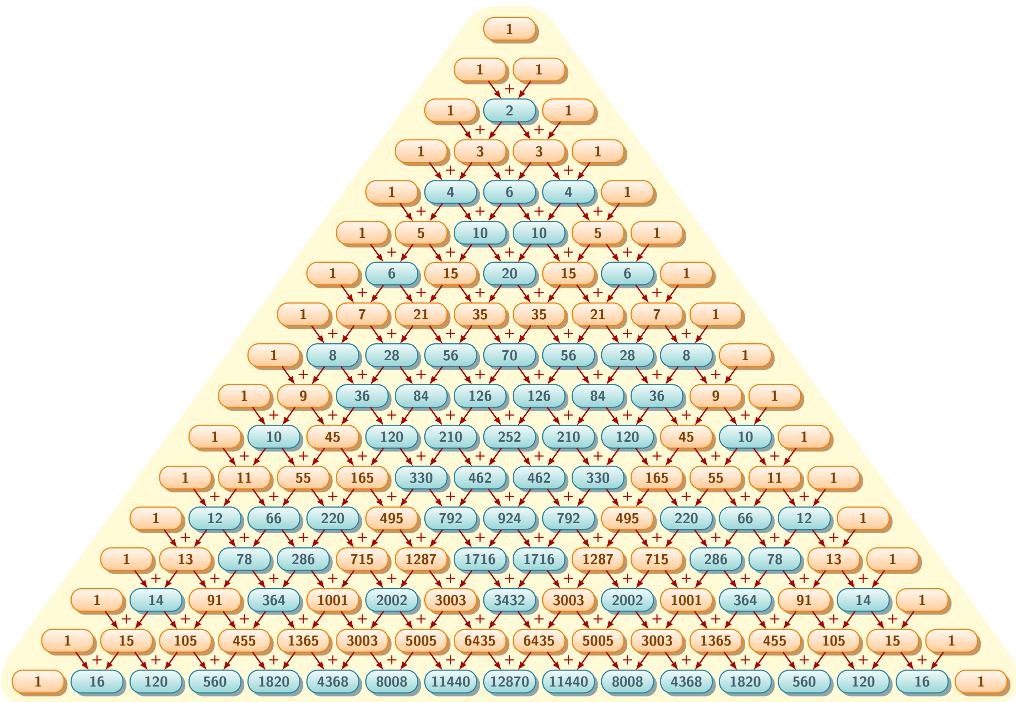
1. $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$;
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$;
4. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
5. $\binom{n}{1} = 1$

Preuve.

1. $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ puisqu'un nombre de chemin ne peut être qu'entier...
2. Il n'existe qu'une manière de réaliser n succès en n épreuves (de même qu'il n'existe qu'une manière d'échouer n fois en n épreuves.)
3. Si la première épreuve est un succès il existe $\binom{n-1}{k-1}$ manières de réaliser $k-1$ succès en $n-1$ épreuves.
   Si la première épreuve est un échec il existe $\binom{n-1}{k}$ manières de réaliser k succès en $n-1$ épreuves et donc au final il existe $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ manières de réaliser k succès en n épreuves d'où :
   $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
4. Il existe $\binom{n}{k}$ comportant exactement k succès en n épreuves. Il en existe tout autant comportant exactement k échecs en n épreuves. Or k échecs correspond à $n-k$ succès d'où :
   $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
5. Il y a n manières de réussir exactement un succès en n épreuves : soit on réussit la première épreuve, soit la deuxième, soit la troisième, soit ..., soit la $n-$ème épreuve d'où :
   $$\binom{n}{1} = 1$$

□

Le théorème précédent permet de calculer les premiers coefficients binomiaux afin de constituer le célèbre triangle de Pascal :



On lit par exemple pour $n = 5$ les informations suivantes :$\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{3} = 5$ et $\binom{5}{5} = 1$

2.3 Formule du binôme de Newton

Théorème 2. *Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel alors :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemple. Pour $n = 2$ on retrouve $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Pour $n = 3$ on trouve $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ puis pour $n = 4$ on a :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Il est possible de calculer $(a-b)^5$ avec cette formule via la transformation :

$$(a-b)^5 = (a+(-b))^5 = \binom{5}{0}a^5(-b)^0 + \binom{5}{1}a^4(-b)^1 + \binom{5}{2}a^3(-b)^2 + \binom{5}{3}a^2(-b)^3 + \binom{5}{4}a^1(-b)^4 + \binom{5}{5}a^5(-b)^0 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Preuve.
$$(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)$$

Obtenir le terme $a^{n-k} \times b^k$ revient à choisir exactement k fois b et $n-k$ fois a. Il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir k fois b exactement. □

Propriété 3. *Pour tout entier naturel n on a :*

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Preuve. On applique le théorème précédent pour $a = b = 1$. Si on regarde la ligne correspond à $n = 4$ dans le triangle de Pascal alors on a démontré que $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$. □

Definition 4. Si n est un entier naturel alors on note $n!$ le produit que l'on lit n factoriel suivant :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$$

Exemple. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Théorème 3. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et k un entier compris entre 0 et k alors on a :*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple. $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{120}{6 \times 2} = 10$

Preuve. Cette égalité sera démontrée en terminale en utilisant le théorème 1. (3) et un raisonnement par récurrence. □

2.4 Loi Binomiale

Théorème 4. *Si X suit une loi binomiale de paramètre n et p alors, pour tout entier k compris entre 0 et n on a :*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Exemple. On tire au hasard une boule dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules noires. On considère comme un succès le fait de tirer une boule noire. On répète de manière identique et indépendante cet expérience 6 fois.

Si on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès alors elle suit une loi binomiale de paramètre $n = 6$ et $p = \dfrac{3}{10}$.

La probabilité qu'on pioche exactement 2 boules noires vaut :

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)^4 = 15 \times \frac{9}{100} \times \frac{7^4}{10^4} \simeq 0,324$$

De même la probabilité qu'on pioche au moins 1 boule noire vaut :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} 0.3^0 \times 0.7^6 = 1 - 0.7^6 \simeq 0,882$$

Preuve. On cherche donc la probabilité d'obtenir exactement k succès dans ce schéma de Bernoulli. La probabiltié d'un des $\binom{n}{k}$ comportant exactement k succès vaut $p^k \times (1-p)^{n-k}$ par conséquent :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$$

□

Théorème 5. *Si X suit une loi binomiale de paramètre n et p alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.*

Preuve. Si X suit une loi binomiale de paramètre n et p on peut l'écrire comme la somme de n variables aléatoires suivant des loi de Bernoulli de paramètre p c'est-à-dire :

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Auquel cas

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = p + p + \cdots + p = np$$

Nous admettons la formule pour la variance. □

Exemple. On tire au hasard une boule dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules noires. On considère comme un succès le fait de tirer une boule noire. On répète de manière identique et indépendante cet expérience 6 fois.

Dans ce contexte $X \hookrightarrow \mathscr{B}(6; 0,3)$ et donc :

$$E(X) = 6 \times 0,3 = 1,8 \qquad \text{et} \qquad V(X) = 6 \times 0,3 \times 0,7 \simeq 1,26 \Longrightarrow \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 1,12$$

Ainsi on peut espérer en moyenne environ $1,8$ succès pour un risque de $1,12$.

2.5 Exercices d'applications

Exercice 1. On sait qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p > \frac{1}{2}$. On sait aussi que :

$$V(X) = 2$$

1. Rappeler la formule donnant l'espérance et la variance d'un loi binomiale.
2. Déterminer la valeur de p.
3. En déduire $E(X)$.

Exercice 2. Une compagnie de transports désire optimiser les contrôles afin de limite l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.
Un trajet côute 10 euros. En cas de fraude, l'amende est de 100 euros.
Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés (ce n'est pas bien du tout !).
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

1. Quelle loi suit X. Justifier.
2. On suppose que $p = 0.05$.
   (a) Calculer à 10^{-4} près $P(X = 5)$. Interpréter.
   (b) Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au moins une fois.
   (c) Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au plus deux fois.
3. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
   (a) Justifier que $Z = 400 - 110X$.
   (b) Calculer $E(Z)$.
4. (a) La fraude est-elle favorable ou non pour Théo ?
   (b) Pour quelles valeurs de p en serait-il autrement ?

Exercice 3. Le druide de Gattaca a besoin pour préparer sa potion magique de champignons syldave. Il envoie 11 vaillants citoyens les chercher. Parsemé de périls et d'embuche on estime qu'un citoyen (aussi vaillant soit-il) a 2 chances sur 17 de périr pour aller dans la forêt et tout autant pour revenir à Gattaca.

1. Calculer la probabilité qu'un citoyen revienne vivant de l'excursion. *on pourra s'aider d'un arbre de probabilité.*
2. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de survivant.
   (a) Expliquer pourquoi $X \hookrightarrow B\left(11; \frac{225}{289}\right)$
   (b) Calculer la probabilité qu'au moins un citoyen ramène des champignons syldave nécessaire à la préparation de la potion magique.
   (c) Calculer $p(X = 0)$ et $p(X = 1)$.
   (d) En déduire la probabilité qu'au moins deux citoyens ramène des champignons syldave.
   (e) Calculer $E(X)$. Interpréter.
3. Lance, un jeune cycliste Syldave, n'a pas la permission de consommer les champignons préparé par le druide, il décide donc de se débrouiller tout seul. Pendant une semaine tous les matins, Lance part chercher les fameux champignons et revient le soir afin de les préparer et de les manger.
   On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Lance a pu manger des champignons syldave.
   (a) Donner $p(Y = 1)$ et $p(Y = 2)$.
   (b) Recopier et compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(Y = k)$								

Exercice 4. Un basketteur effectue une série de 7 lancers francs. Il réussit chacun des lancers francs avec une probabilité égale à p.
Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la plus petite valeur de p, à $10-2$ près, telle qu'on soit sûr à plus de 99% que le basketteur réussisse au moins un des sept lancers francs.

3 Echantillonnage et Prise de décision

3.1 Intervalle de fluctuation à 95%

Lors d'une élection présidentielle, le candidat « D. » est élu avec 52% des voix.

On interroge, au sortir des urnes, un échantillon de 100 votants et on leur demande s'ils ont voté pour D. ou non. On suppose que les votants disent la vérité. On note X le nombre de votants qui déclarent avoir voté pour D. Il est illusoire de penser que $X = 52$, cependant il est naturel de penser qu'il y a plus de chance que $X = 45$ plutôt que $X = 33$.

La loi binomiale va nous aider à préciser les choses.

Puisqu'on répète 100 fois la même question de manière indépendante, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,52$ c'est-à-dire :

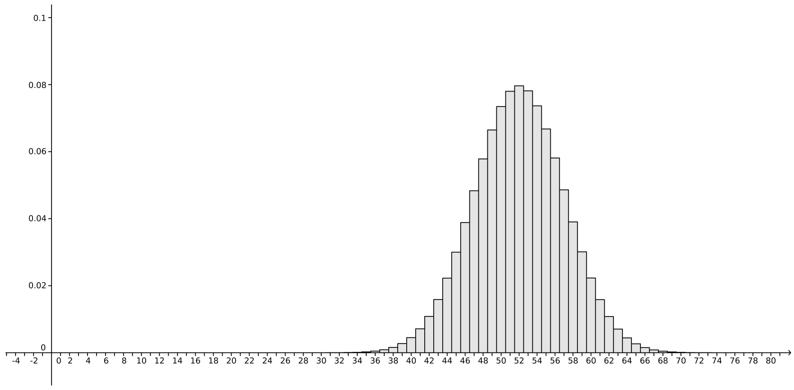
$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(100; 0,52)$$

Nous savons calculer $P(X = k)$ pour k compris entre 0 et 100. Par exemple :

$$P(X = 52) = \binom{100}{52} \times 0,52^{52} \times 0,48^{48} \simeq 0,08$$

Il n'y a pas plus de 8% de chance qu'exactement 52 personnes de cet échantillon aient voté pour D. C'est bien peu !

Pour y voir plus clair représentons l'histogramme de la loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,52$:



En observant cet histogramme il semblerait que la probabilité que X soit compris entre 34 et 70 soit très forte autrement dit :

$$P(34 \leq X \leq 70) \simeq 1$$

Par conséquent il est très improbable que l'on observe $X < 34$ ou $X > 70$, si tel était le cas il faudrait commencer à se poser de sérieuse question. Peut-être y a t-il eu bourrage des urnes, peut-être les votants sont des menteurs, peut-être on a vraiment pas eu de chance...

Definition 5. On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n; p)$. Un intervalle du type $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ est appelé *intervalle de fluctuation* à 95% si :

$$P(a \leq X \leq b) \simeq 0,95$$

Dans la pratique on choisit a comme le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et b comme le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

On utilise alors une calculatrice ou un ordinateur pour déterminer a et b.

Avec une TI NSPIRE, on tape « binomCdf(100,0.52,A,B) » obtenu en allant dans Menu, probabilité puis distribution. Ensuite on teste des valeurs de A et B autour de la moyenne.

Exemple. Ici, $E(X) = 100 \times 0.52 = 52$. La commande binomCdf(100,0.52,42,62)$\simeq$ 0.965 tandis que binomCdf(100,0.52,43,61)$\simeq$ 0.943, on en déduit que l'intervalle de fluctuation à 95% est de la forme $[0,42; 0,62]$. Autrement dit il y a plus de 95% de chance que dans notre échantillon, il y ait entre 42% et 62% de personnes déclarant avoir voté pour le candidat D.

3.2 Prise de décision

Exercice 5. Lors d'une élection un candidat a été élu avec 62% des voix. A la sortie des urnes on a interrogé 1000 citoyens, 470 d'entre eux ont déclaré avoir voté pour le candidat élu.

Est-il légitime de soupçonner une fraude ?

Indication : Vérifier que l'intervalle de fluctuation à 95% est $[0,590; 0.650]$ puis appliquer la règle suivante :

Régle 1. *Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, on accepte l'hypothèse faite sur la probabilité p au seuil 5% ; sinon on rejette l'hypothèse selon laquelle cette probabilité vaut p.*

Exercice 6. Alice lance 1000 fois une pièce de monnaie et obtient 484 pile.

Est-il raisonnable de penser que la pièce d'Alice est bien équilibrée ?

Indication : On pourra se servir du tableau suivant :

$X \in$	$[490; 510]$	$[480; 520]$	$[470; 530]$	$[460; 540]$	$[450; 550]$	$[440; 560]$
Probabilité	0.49	0.81	0.95	0.99	0.999	0.9999

4 Pour aller un peu plus loin

Definition 6. le nombre de listes de longueur n, constituées de 1 et de 0, et ayant k fois l'élément 1 et $n-k$ fois l'élément 0 est égal à $\binom{n}{k}$. C'est également le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments. Ces parties ou ces listes sont appelées des k-combinaisons sans répétition.

Le nombre de suites de n entiers naturels dont la somme vaut k est égale à $\binom{n+k-1}{k}$. C'est aussi le nombre de façons de choisir k éléments d'un ensemble à n éléments si les répétitions sont permises (nombre de combinaisons avec répétition).

Exemple. D'un point de vue plus intuitif, ce nombre permet de savoir combien de tirages de k éléments parmi n différents on peut réaliser. Les quatre as d'un jeu de cartes sont face contre table, on veut savoir combien de possibilités de jeu il existe si l'on prend simultanément deux cartes au hasard. Si l'on suit la formule il y en a six.

Pour s'en persuader, voici la liste des mains :

1. as de cœur et as de carreau
2. as de cœur et as de trèfle
3. as de cœur et as de pique
4. as de carreau et as de trèfle
5. as de carreau et as de pique
6. as de trèfle et as de pique

Il n'existe pas d'autres possibilités vu que l'ordre n'importe pas (« carreau - pique » est équivalent à « pique - carreau »).

Exemple. Dans une classe de 28 élèves on peut élire $\binom{28}{2} = \dfrac{28!}{2!26!} = \dfrac{28 \times 27}{2} = 14 \times 27 = 378$ couples de délégués différents.

4.0.1 Un (petit) test de primalité

Théorème 6. *Un entier $n \geq 2$ est premier si et seulement si tous les $\binom{n}{k}$ pour $k = 1, \dots, n-1$ sont divisibles par n.*

Preuve. $\Longrightarrow$) Si $n \geq 2$ est un nombre premier montrer que n divise $\binom{n}{k}$.

On sait que, pour tout k entier compris entre (strictement) entre 0 et n :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Longrightarrow \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

Or, $(n-1-(k-1))! = (n-k)!$ par conséquent :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1} \Longleftrightarrow k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \qquad (\bigstar)$$

On utilise pour conclure le lemme d'euclide :

Lemme 1. *Si un nombre premier p divise le produit de deux nombres entiers b et c, alors p divise b ou c.*

D'après $(\bigstar)$ n divise le produit $k\binom{n}{k}$ donc d'après le lemme d'Euclide n divise k ou $\binom{n}{k}$. Etant donné que $k < n$, n ne peut diviser que $\binom{n}{k}$.

Ainsi pour $0 < k < n$ on vient de démontrer que n divise $\binom{n}{k}$.

$\Longleftarrow$) Supposons que tous les $\binom{n}{k}$ pour $k = 1, \dots, n-1$ sont divisibles par n, puis raisonnons par l'absurde, supposons que n ne soit pas un nombre premier alors n est divisible par $2 \leq k \leq n-1$ ($\frac{n}{k}$ est donc un nombre entier). Réutilisons $(\bigstar)$:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \Longleftrightarrow \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!} = \frac{(n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{(k-1)!}$$

Puisque k divise n, il ne divise aucun des $k-1$ entiers précédents n, ainsi k ne divise pas $(n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$ et donc k ne divise pas $\binom{n-1}{k-1}$. Enfin puisque $\binom{n-1}{k-1}$ ne contient pas le facteur k et comme $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$ nous concluons que n ne divise pas $\binom{n}{k}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

□