∽ FORMULAIRE ∽

I) Géométrie

On munit l'espace d'un repère. On considère

- $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$, $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ et $C(x_C\ ;\ y_C\ ;\ z_C)$ trois points,
- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls.

I.1. Coordonnées

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Si le repère est orthonormé, on a $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (ce qui équivaut à ce que leurs coordonnées soient proportionnelles).

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

I.2. Barycentre

On appelle barycentre de trois points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c), avec $a + b + c \neq 0$, l'unique point G tel que

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Concrètement, il s'agit du point d'équilibre des trois points affectés de leur «poids»

Dans ce cas on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

G pour coordonnées :

$$G\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}\ ;\ \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\ ;\ \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}\right)$$

Si H est le barycentre ce (B, b) et (C, c), avec $b + c \neq 0$, alors G est aussi le barycentre des points (A, a) et $(H, b + c)$

Remarques :

- Le milieu du segment [AB] est le barycentre des points A et B affectés du même poids.
- Le centre de gravité du triangle ABC est le barycentre des points A, B et C affectés du même poids.

I.3. Produit Scalaire

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

I.4. Produit Vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix} \qquad ||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \sin(\vec{u};\vec{v})$$

Aire du triangle ABC $= \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$ Aire du parallélogramme ABCD $= ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$

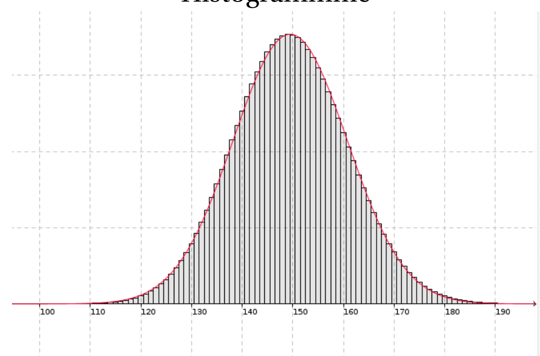
II) Probabilités

II.1. Les lois Discrètes

Les lois discrètes modélisent des expériences où l'univers est dénombrable (on peut compter son nombre d'éléments). On s'intéresse notamment à des événements du type $P(X = k)$.

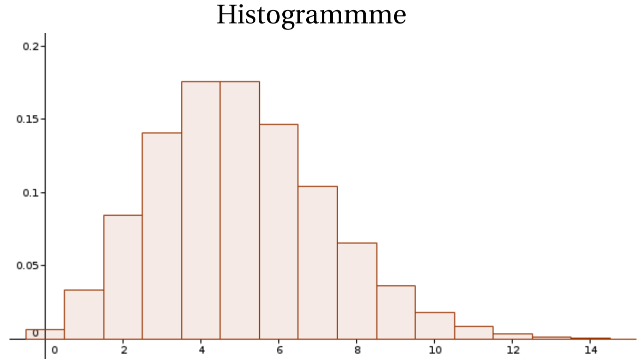
- Une **loi binomiale** modélise le nombre de succès dans répétition de mêmes épreuves indépendante à deux issues. Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors :
  - Voir fiche TI.
  - $E(X) = np$ $\qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Histogrammme



- Une **loi de Poisson** modélise des phénomènes rares, qui se produisent de manière indépendante. et aléatoire.
  Si X suit la loi de Poisson de paramètres λ, alors :
  - Les procédures de calculs à la calculatrice sont les mêmes que pour la loi binomiale, en choisissant la loi de Poisson et en rentrant la valeur du paramètres λ
  - $E(X) = \lambda$ $\qquad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$

Histogrammme

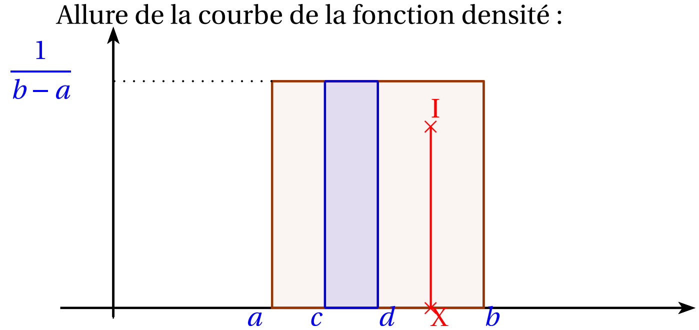


II.2. Lois Continues

Les lois continues modélisent des expériences où l'univers est indénombrable (comme le temps qui s'écoulent de façon continue). On ne s'intéresse plus à des événements du type $P(X = k)$ car ils sont tous de probabilité nulle, mais plutôt à des événements du type $P(a \leq X \leq b)$.

- Une **loi uniforme** modélise le choix d'un nombre aléatoire dans un intervalle de nombres réels.
  Si X suit la loi uniforme sur $[a;b]$ alors :
  - $P(c \leq X \leq d) = \dfrac{\text{longueur de } [c;d]}{\text{longueur de } [a;b]} = \dfrac{d-c}{b-a}$
  - $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ $\qquad \sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Allure de la courbe de la fonction densité :

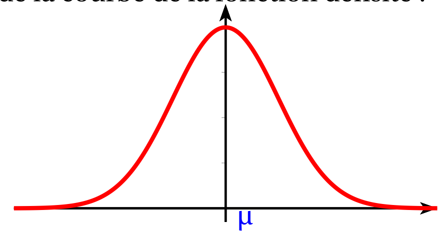


⇝ Une **loi normale** modélise de nombreux phénomènes naturels très fréquents (d'où son nom), qui résultent de l'addition de plusieurs causes indépendantes, comme la taille d'individus, le taux de cholestérol, les erreurs de mesure …
Si X suit la $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$ alors :

— Voir fiches calculatrices + utilisation du graphique de la fonction densité pour trouver ce que la calculatrice ne peut pas faire.

— $E(X) = \mu$ $\qquad\sigma(X) = \sigma$

Allure de la courbe de la fonction densité :



⇝ Une **loi exponentielle** modélise notamment la durée de vie d'un phénomène sans mémoire ou sans vieillissement, ou encore non sujet à l'usure du temps.
Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors :

— pour tous réels a et b tels que $0 \leq a \leq b$ on a

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}, \qquad P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}, \qquad P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$$

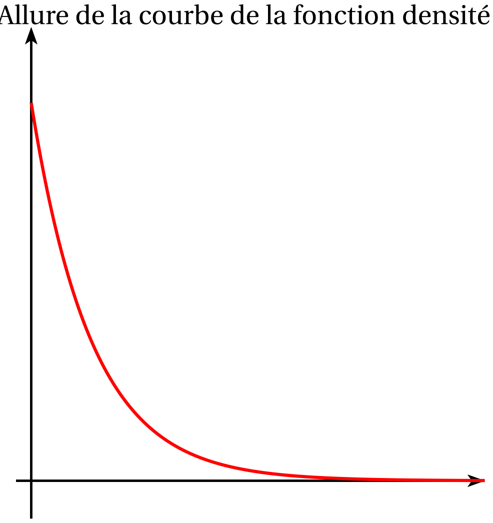
— pour tous réels t et h positifs, on a

$$P_{X \geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$$

d'où le fait que l'on parle de durée de vie sans vieillissement.

— $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ $\qquad\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Allure de la courbe de la fonction densité :



II.3. Approximation

Dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, on peut approximer une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi normale $\mathcal{N}\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$
Dès que $n \geq 30$, $p \leq 0.1$ et $np \leq 10$, on peut approximer une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$

III) Statistiques inférentielles

Le tableau ci-dessous regroupe toutes les situations dans lesquelles on doit savoir fournir une estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance :

Paramètre de la population totale à estimer	Valeur du paramètre dans l'échantillon de taille n	Estimation ponctuelle pour la population totale	Estimation par intervalle de confiance au niveau de confiance $1-\alpha$ pour la population totale
Fréquence	f	$p = f$	$\left[f - u_\alpha\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}; f + u_\alpha\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right]$
Moyenne	$\overline{x}$	$\mu = \overline{x}$	$\left[\overline{x} - u_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + u_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
Écart-type	s_n	$\sigma = s_n\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$	