COURS
LOI BINOMIALE

Il reste à travailler la partie sur l'espérance et l'écart-type (avec une simulation à faire).

I) Bernoulli et la loi binomiale

I.1. Epreuve et schéma de Bernoulli

Illustration : La prochaine finale de la coupe Davis oppose la Suisse à la France. Elle se joue en 5 matchs. La première équipe à remporter trois matchs gagne, mais les 5 matchs ont lieu dans tous les cas.
Les Français considèrent que quand la France gagne un match, il s'agit d'un Succès (S) et sinon d'un échec (E).
De plus, ils partent du principe que les Français vont gagner le match en double. Ainsi, pour gagner, il leur faudra remporter au moins 2 matchs en simple sur les 4.
Par contre, grâce à la présence de Roger et de Stanislas dans l'équipe suisse, on estime que les Suisses ont une probabilité de $0,7$ de remporter un match en simple.

On se demande la probabilité que la France remporte la coupe Davis.

Pour guider la recherche des élèves

- Demander la probabilité la France gagne les 4 matchs en simple, puis 3, puis 2.
- Suggérer un arbre de probabilité (4 étapes, donc long). Demander son nombre de chemins au final.
- S'interroger sur la probabilité d'un chemin avec 3 Succès. Est-ce toujours la même ?
- S'interroger sur le nombre de chemins avec 3 Succès (lister éventuellement, sans les branches).
- Idem avec 2 succès sur les 4. Faire apparaître la méthode.

Rappeler ce qu'est un arbre de probabilité et les règles de calculs qui s'appliquent.
Sur le début de l'arbre, faire apparaître ce qu'est une épreuve de Bernoulli ainsi qu'un schéma de Bernoulli à 4 étapes, puis donner les définitions suivantes.

Définition 1.

Une **épreuve de Bernoulli de paramètre** p est une expérience aléatoire ne comportant que 2 issues (Succès et Echec).
et où p désigne la probabilité d'un Succès.
Un **schéma de Bernoulli de paramètres** n **et** p est la répétition de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes (ie que les résultats de l'une n'influent pas sur les résultats des autres et qu'elles sont toutes de paramètre p).

Exemples :

- « Jouer un match de tennis en simple France/Suisse de la coupe Davis et regarder si la France gagne » est une épreuve de Bernoulli.
  On considère ici que le succès est de gagner le match de probabilité $p = 0.3$ et l'échec est de le perdre de probabilité $1 - p = 0.7$.
- « Jouer 4 matchs de tennis en simple France/Suisse de la coupe Davis et regarder le nombre de match(s) gagné(s) par la France » est un schéma de Bernoulli à 4 étapes.
  En effet, l'expérience est constituée de 4 épreuves élémentaires identiques et indépendantes (jouer un match).
  Chaque match n'a que deux issues possibles :
  - soit l'épreuve est un succès lorsque la France gagne, de probabilité $p = 0.3$
    On choisit pour succès ce que l'on compte
  - soit l'épreuve est un échec lorsque la France perd, de probabilité $1 - p = 0.7$.
- « Lancer trois dés et regarder le nombre de 5 obtenus » est un schéma de Bernoulli à 3 étapes.
  En effet, l'expérience est constituée de 3 épreuves élémentaires identiques et indépendantes (lancer un dé).
  Chaque lancer de dé n'a que deux issues possibles :
  - soit l'épreuve est un succès lorsque l'on obtient 5, de probabilité $p = \frac{1}{6}$
  - soit l'épreuve est un échec lorsque l'on obtient pas 5, de probabilité $1 - p = \frac{5}{6}$.

I.2. Loi binomiale

Définition 2.

Dans un schéma de Bernoulli représenté par un arbre, on s'intéresse à la probabilité d'obtenir un chemin contenant un certain nombre X de Succès, peu importe leur ordre.
On dit que X *est une* ***variable aléatoire*** *car elle associe des nombres à des issues d'une expérience aléatoire.*
Ainsi X peut prendre les valeurs $0; 1; \ldots; n$.
Dans ce contexte là, on dit que X suit une **loi binomiale de paramètres** n **et** p, notée $\mathrm{B}(n; p)$.

Exemple :

Pour la coupe Davis, la variable aléatoire X comptant le nombre de match(s) gagné(s) par la France suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0.3$.
On s'est donc intéressé aux événements $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 5)$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 4)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 3)$ ou encore $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 3)$ ou $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 2)$. Ces probabilités longues à calculer à la main sans connaissance mathématiques supplémentaire. Heureusement pour nous, elles sont données par une formule (valable uniquement pour la loi binomiale), connue par votre calculatrice ou tout logiciel de calcul.

II) Calculs de probabilités

II.1. A la main (facultatif)

Dans l'exemple de la coupe Davis, pour $P(X=3)$ *mettres des flèches expliquant d'où viennent chacun des facteurs.*
Faire de même ensuite pour la formule gloable ci-dessous (facultatif).

Théorème 1.

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors pour tout $k \in \{0;1;\dots;n\}$ on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Mais cette formule n'est pas à connaître, car votre merveilleuse calculatrice calcule très bien cela !

Remarque : Dans l'exemple, si X compte le nombre de matchs en simple gagnés par la France, on reconnait la loi $B(4;0.3)$ et on a voulu calculer $P(X \geq 2)$ et donc $P(X=4)$, $P(X=3)$ et $P(X=2)$.
Et ceci s'avère long sans connaissance mathématique supplémentaire.

Dans l'exemple précédent, en réfléchissant pour $P(X=3)$, on constate que cette probabilité n'est en fait que la somme de la probabilité de chacun des chemin de l'arbre à 4 étapes contenant exactement 3 succès. Or cette probabilité est toujours la même, grâce à l'indépendance des épreuves et vaut $p^3 \times (1-p)^1$.
Reste donc à savoir combien de chemins contiennent 3 succès.
On note ce nombre $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et on le lit « 3 parmi 4 ». Il s'agit en fait du nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 4.

On peut démontrer que ce nombre vaut $\dfrac{4!}{3!1!} = 4$ Ainsi $P(X=3) = 4 \times 0,3^3 \times 0,7^1$

En suivant le même raisonnement, on a $P(X=2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times 0,3^2 \times 0,7^2$

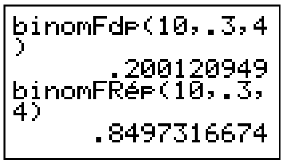
C. Aupérin
c.auperin@wicky-math.fr.nf

II.2. A la calculatrice

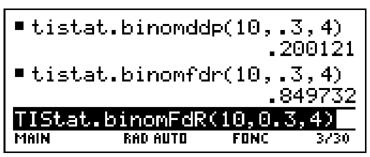
Casio

cf Nathan « Exos & Méthodes » p 191

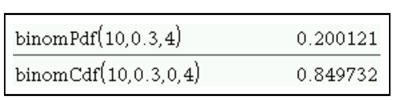
TI 82-83-84

Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre
Calculer ⇝ $P(X = k)$ ⇝ $P(X \leq k)$ **où** $X \hookrightarrow B(n, p)$		Appuyer sur 2nde + var pour obtenir distrib Puis choisir `0:binomFdp` ou `A:binomFRép` Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres n, p et k

TI 89

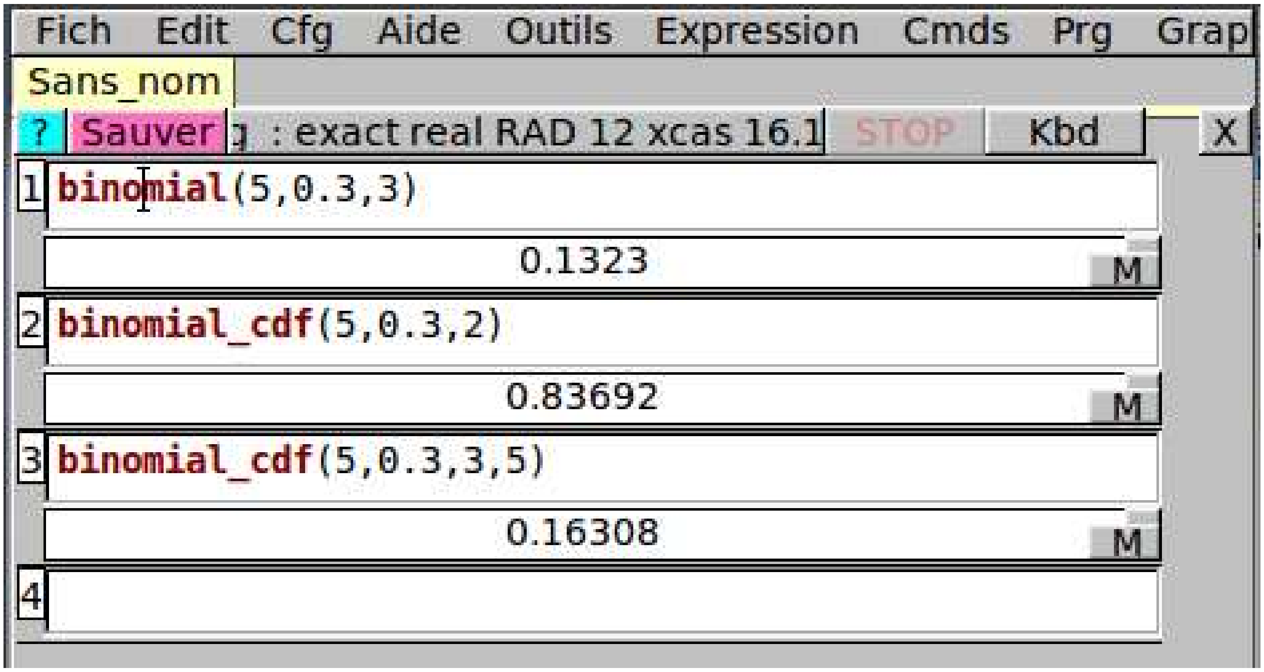
Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre
Calculer ⇝ $P(X = k)$ ⇝ $P(X \leq k)$ **où** $X \hookrightarrow B(n, p)$		Dans CATALOG ouvrir l'onglet F3 AppFlash Appuyer sur (pour aller à la lettre B. Puis choisir `binomDdP(....TIStat` ou `binomFdR(....TIStat` Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres n, p et k

TI Nspire CX CAS

Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre
Calculer ⇝ $P(X = k)$ ⇝ $P(X \leq k)$ **où** $X \hookrightarrow B(n, p)$		Dans l'onglet $2: \int \sum$ du catalogue Ouvrir la catégorie `Probabilités`. Puis la sous-catégorie `Distributions` Puis choisir `Binomiale DdP` ou `Binomiale FdR` Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres n, p et k

Leur demander à chaque fois quelle probabilité cela calcule

II.3. Sur Xcas



Attention à l'ordre des paramètres !

Quand X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,3$ on a :

- ⇝ La première ligne calcule $P(X = 3)$
- ⇝ La deuxième ligne calcule $P(X \leq 2)$ ie $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
- ⇝ La troisième ligne calcule $P(3 \leq X \leq 5)$ ie $P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

III) Méthode globale

Exemple :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard, 10 fois de suite **avec remise**.
Un joueur gagne s'il pioche au moins 3 figures (c'est-à-dire un valet, une dame ou un roi).
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de figures obtenues.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 0)$. Interpréter cette probabilité par rapport au jeu.
3. Calculer $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
4. En déduire $P(X \leq 2)$. Vérifier calculant cette probabilité directement sur la calculatrice.
5. En déduire la probabilité que le joueur gagne.

Solution :

1. Il s'agit de justifier que nous sommes en présence d'un schéma de Bernoulli.
« Piocher 5 cartes avec remise » est constituée de $n = 10$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes puisqu'il y a remise
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
   - ⇝ soit l'épreuve est un succès lorsque l'on obtient une figure de probabilité $p = \frac{3}{8}$
   Attention, on doit choisir pour succès ce que compte la variable aléatoire.
   - ⇝ soit l'épreuve est un échec lorsque l'on n'obtient pas de figure de probabilité $1 - p = \frac{5}{8}$

   Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$
   Ainsi, la variable aléatoire X comptant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$ »
2. $P(X = 0) \simeq 0.0091$. Il s'agit de la probabilité de ne piocher aucune figure.
3. $P(X = 1) \simeq 0.0546$ et $P(X = 2) \simeq 0.1473$
4. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \simeq 0.2110$.
Directement à la calculatrice on obtient $P(X \leq 2) \simeq 0.2110$
5. La probabilité qu'un joueur gagne est donc $P(X \geq 3) = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \simeq 0.7890$

Justifier une loi binomiale

Il s'agit de justifier que nous sommes en présence d'un schéma de Bernoulli.
Pour cela, on retiendra par coeur les phrases types suivantes, à adapter au contexte de l'exercice :

- ⇝ « *L'expérience* est constituée de $n = \ldots$ épreuves élémentaires identiques et indépendantes (*puisque* ...) »
- ⇝ « Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
  - soit l'épreuve est un succès lorsque ... de probabilité $p = \ldots$
  Attention, on doit choisir pour succès ce que compte la variable aléatoire (dit dans l'énoncé).
  - soit l'épreuve est un échec lorsque ... de probabilité $1 - p = \ldots$ »
- ⇝ « Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètre $n = \ldots$ et $p = \ldots$ »
- ⇝ « Ainsi, la variable aléatoire X comptant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = \ldots$ et $p = \ldots$ »

Exercice 1 : Une entreprise fabrique une grande quantité de tubes.
Dans un lot de tubes, 3% des tubes ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tubes de ce lot. Le lot est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 50 lots.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 0)$. Interpréter.
3. En déduire la probabilité que dans un tel prélèvement, au moins un tube ne soit pas conforme pour la longueur.
4. L'entreprise reçoit une amende si, lors d'un tel prélèvement pratiquer par un expert, il y a 3 tubes ou plus non conformes pour la longueur.
   - ⇝ Calculer la probabilité que l'entreprise ne reçoive par d'amende.
   - ⇝ En déduire celle que l'entreprise reçoive une amende.

Exercice 2 : Un grossiste en fourniture de bureau revend un ruban adhésif.
La probabilité qu'un ruban adhésif jaunisse le papier est de $0,008$.
Un client achète 500 rubans adhésifs. On assimilera le choix des ces 500 rubans à un tirage aléatoire avec remise.
On s'intéresse à la vairable aléatoire X qui compte dans ce lot le nombre de rubans qui jaunissent le papier.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces rubans jaunisse le papier ?

IV) Espérance et écart-type

Simuler l'expérience des 4 matchs de tennis de la coupe Davis sur un ordinateur. (Proposer le programme)
Lancer chacun la simulation plusieurs fois.
Combien de matchs peut espérer gagner la France ?
Modifier alors le programme pour qu'il simule N *fois la rencontre de 4 matchs et qu'il renvoit le nombre de matchs gagnés en moyenne par rencontre par la France.*
Simuler alors chacun 1000 *rencontres et conjecturer la réponse.*

Définition 3.

Soit X une variable aléatoire mesurant un « gain » lors d'une expérience.
Lors d'un grand nombre d'expériences :

- le « gain moyen » d'un joueur par expérience se stabilise aux environs d'une valeurs appelée **espérance mathématique de** X , notée E(X).
  Lors d'un jeu, on l'interprète comme le gain moyen que l'on peut espérer avoir par partie sur un grand nombre de parties.
- La dispersion des gains moyens autour de l'espérance se mesure grâce à l'écart-type, noté $\sigma(X)$.
  Lors d'un jeu, on l'interprète comme le risque du jeu. En effet, plus l'écart-type est grand, plus on risque d'obtenir un gain loin de l'espérance et réciproquement.

Théorème 2.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On a

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Exercice 3 : Un constructeur de composants électroniques fabrique des diodes.
La probabilité pour qu'une diode soit défectueuse est 5×10^{-3}. On prélève au hasard un lot de 10 diodes dans la production d'une journée. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 diodes.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de diodes défectueuses dans ce lot.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres
2. Calculer à 10^{-4} près la probabilité d'avoir dans ce lot de 10 diodes :
   a. exactement une diode défectueuse ;
   b. exactement deux diodes défectueuse ;
   c. au moins 2 diodes défectueuses ;
   d. au plus 2 diodes défectueuses.
3. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter.
4. Calculer l'écart-type de X.

Exercice 4 : Une usine fabrique en grande quantité des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.
La probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans un stock important ait un diamètre défectueux est $0,02$.
On prélève au hasard 20 rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre. Le stock est assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 rondelles.
On note X la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de rondelles ayant un diamètre défectueux.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans ce prélèvement aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3}.

3. Calculer la probabilité que dans ce prélèvement au plus trois rondelles aient un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3}.
4. Calculer la probabilité que dans ce prélèvement au moins huit rondelles aient un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3}.
5. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter.
6. Calculer l'écart-type de X.

Exercice 5 : Un tireur à la carabine touche le centre de la cible avec une probabilité égale à $0,7$.

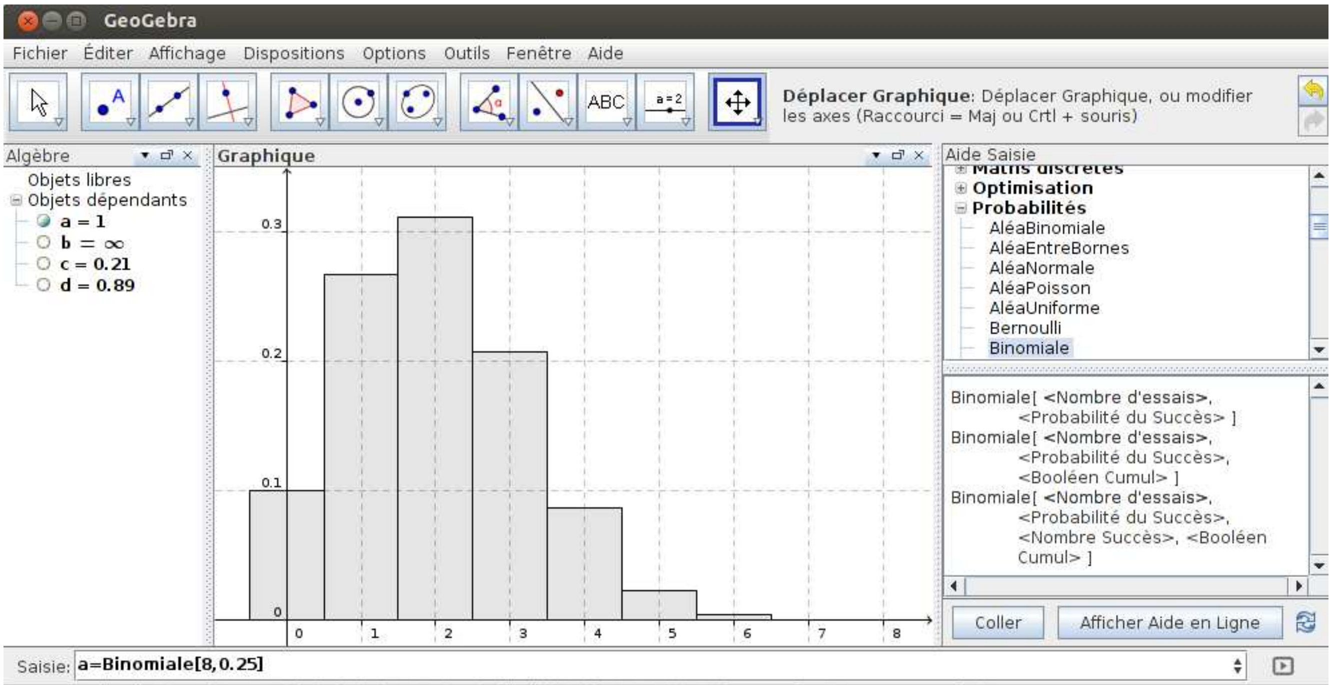
1. Quelle est la probabilité que sur 5 tirs il touche au moins une fois sa cible ?
   Bien rédiger la réponse en justifiant le calcul !
2. Le tireur repère tous les jours de l'année une séance de 5 tirs.
   Combien de fois peut-il espérer toucher en moyenne sa cible par jour ?

Exercice 6 : Une chaîne de magasins de bricolage commercialise des ponceuses.
La probabilité qu'une ponceuse soit défectueuse est $p = 0,08$. On prélève au hasard 25 ponceuses dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 25 ponceuses.
On note X la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de ponceuses défectueuses de ce prélèvement.
Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 10^3.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans ce prélèvement il y ait exactement 4 ponceuses défectueuses.
3. Calculer la probabilité que dans ce prélèvement au moins une ponceuse défectueuse.
4. a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.Interpréter.
   b. Calculer l'écart-type de X. Interpréter.
   c. La réparation d'une ponceuse défectueuse coûte 30€. Quelle est, pour un lot de 25 ponceuses, le montant des réparations à prévoir ? Est-ce précis ?

V) Représentation avec Géogébra

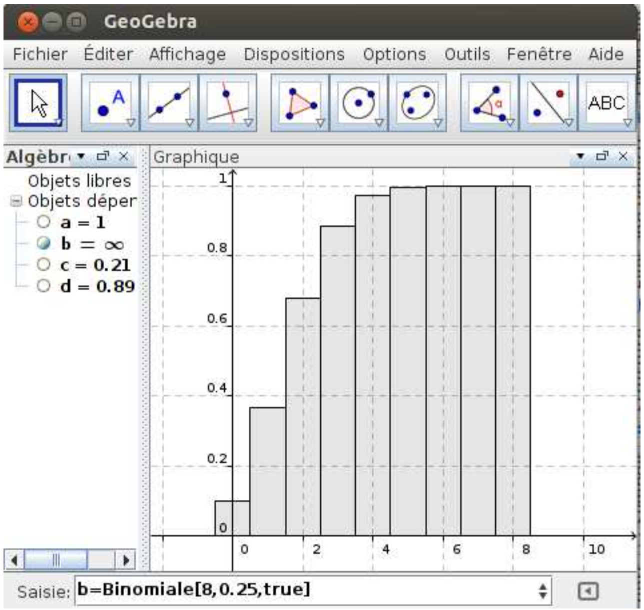
On accède aux commandes nécessaires dans l'aide de saisie à droite
Cliquer éventuellement sur la flèche dans le coin en bas pour faire afficher l'aide de saisie puis aller dans l'onglet « Probabilités »

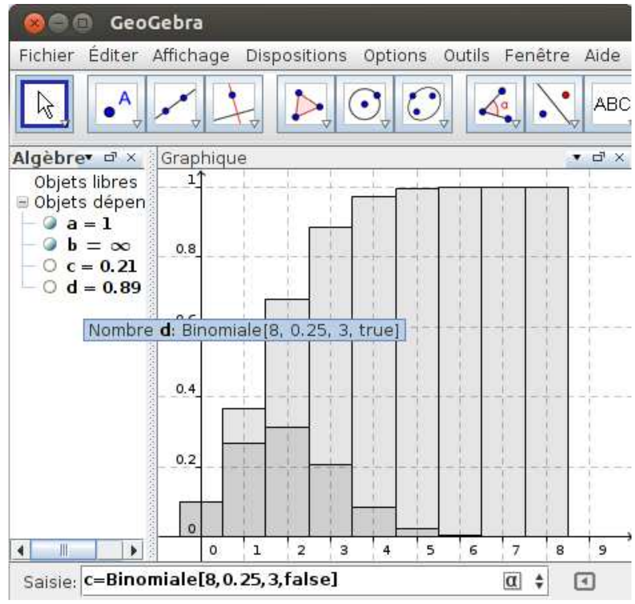


Quand X suit une loi binomiale de paramètres n et p on a :

⇝ **Binomiale**[n, p] : Retourne l'histogramme représentant la loi binomiale $B(n, p)$.
Remarques :

- Un histogramme est un diagramme dans lequel **l'aire** des rectangles centrés autour d'un nombre k représentent $P(X = k)$.
- Ici $n = 8$ et $p = 0.25$
- Sur la gauche dans la fenêtre « Algèbre », $a = 1$ signifie que l'aire totale des rectangles vaut 1.
- L'espérance est toujours das la base du rectangle ayant la plus haute colonne (ici entre 1.5 et 2.5 et en effet $E(x) = np = 8 * 0.25 = 2$).
- L'écart-type mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance, autrement dit l'écrasement de la courbe.





⇝ **Binomiale**[n**,** p**, true**] : Retourne le graphique en escalier représentant la loi binomiale $B(n, p)$.
Remarque : Ici **l'aire** d'un rectangle centré autour d'un nombre k représentent $P(X \leq k)$.
On peut remarquer qu'on « cumule » les rectangles au fur et à mesure.

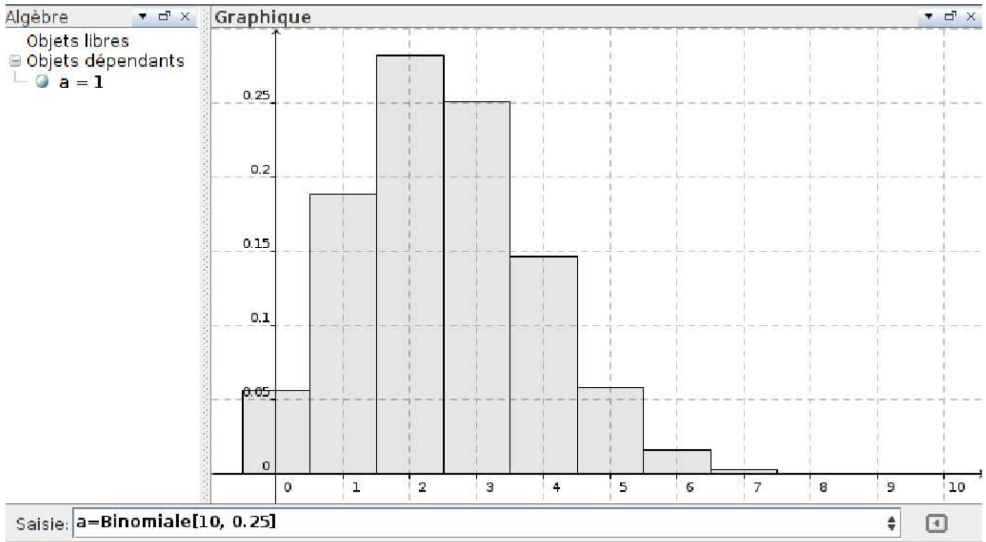
⇝ **Binomiale**[n**,** p**,** k**, false**] : Retourne la probabilité $P(X = k)$ dans la fenêtre algèbre (ne dessine rien). Ici il s'agit de la valeur $c = P(X = 3)$, donc de la hauteur du rectangle centré autour de 3 dans l'histogramme a

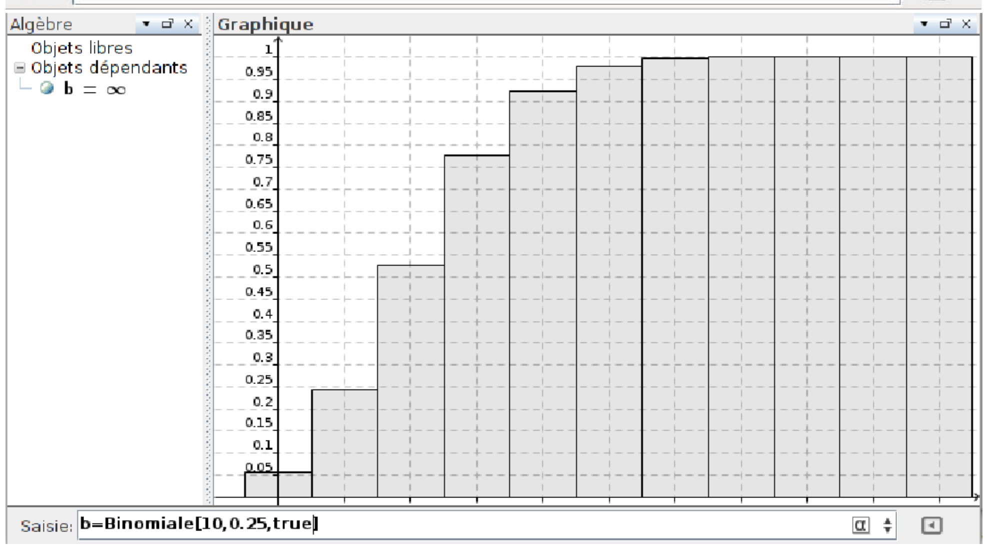
⇝ **Binomiale**[n**,** p**,** k**, true**] : Retourne la probabilité $P(X \leq k)$ dans la fenêtre algèbre (ne dessine rien). Ici il s'agit de la valeur $d = P(X \leq 3)$, donc de la hauteur du rectangle centré autour de 3 dans l'histogramme b

Exercice 7 : Un QCM (Questionnaire à Choix Multiples) est composé de 10 questions numérotées de 1 à 10. Pour chacune d'elles, quatre réponses possibles sont proposées, dont une seule est exacte.
La difficulté réside dans le fait que ce QCM Syldave est en chinois, et que notre candidat Fabrice ne lit pas le chinois (bien qu'il le parle couramment, évidemment). Il se voit donc obligé de répondre à chaque question au hasard, de façon indépendante (Fabrice déteste ne pas répondre du tout, il veut tenter sa chance coûte que coûte).

Une bonne réponse donne 1 point à Fabrice, une mauvaise ne lui donne rien.
On désigne par X la variable aléatoire comptant le point obtenus par Fabrice.

1. Justifier X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Dans géogébra, on donne l'histogramme et le graphique en escalier ci-contre. Lire sur ces graphiques :
   - **a.** la probabilité que Fabrice obtienne la note maximale ?
   - **b.** la probabilité qu'il obtienne au moins la moyenne ?
   - **c.** la note la plus probable de Fabrice ?
3. Quelle note que Fabrice peut-il espérer obtenir en moyenne sur un grand nombre de QCMs qu'il aurait réaliser ainsi ?





Exercice 8 : **Affaire Castaneda contre Partida**

Des arguments de type probabiliste peuvent être avancés et pris en compte dans les cours de justice. En novembre 1976, Rodrigo Partida, d'originie mexicaine, était condamné à huit ans de prison pour vol et tentative de viol dans un comté du sud du Texas. Il attaqua le jugement sous motif que la désignation des jurés dans l'Etat du Texas était discriminatoire pour les Américains d'origine mexicaine. Son argument était que ceux-ci n'étaient pas suffisamment représentés dans les jurys populaires.

Attendu de la Cour Suprême des Etats-Unis (affaire Castaneda contre Partida)

« Si les jurés étaient tirés au hasard dans l'ensemble de la population, le nombre d'américains mexicains dans l'échantillon pourrait alors être modélisé par une distribution binomiale ...

Etant donnée que 79.1% de la population est mexico-américaine, le nombre attendu d'américains mexicains parmi les 870 personnes convoquées en tant que grands jurés pendant la période de 11 ans est approximativement de 688. Le nombre observé est 339.

Bien sûr, dans n'importe quel tirage considéré, une certaine fluctuation par rapport au nombre attendu est prévisible. Le point essentiel, cependant, est que le modèle statistique montre que les résultats d'un tirage au sort tombent vraisemblablement dans le voisinage de la valeur attendue ...

La mesure des fluctuations prévues par rapport à la valeur attendue est l'écart-type, défini pour la distribution binomiale comme la racine carré de la taille de l'échantillon (ici 870) multiplié par la probabilité de sélectionner un américain mexicain (ici 0.791) et par la probabilité de sélectionner un non américain mexicain (ici 0.209) ... Ainsi, dans ce cas, l'écart-type est approximativement de 12.

En règle générale, pour de si grands échantillons, si la différence entre la valeur attendue et le nombre observé est plus grande que deux ou trois écarts-types, alors l'hypothèse que le tirage du jury était au hasard serait suspecte à un spécialiste des sciences humaines.

Les données sur 11 années reflètent ici une différence d'environ 29 écarts-types. Un calcul détaillé revèle qu'un éloignement aussi important de la valeur attendue se produirait avec moins d'une chance sur 10^{140}. »

Source : « *Prove it with Figures (Statistics for Social Science and Behaviour Sciences)* », Hans Zeisel et David Kaye ; Springer (2006)

1. Définir la variable aléatoire X qui, dans cette situation, suit une loi binomiale.
   Quels sont les paramètres de cette loi binomiale ?
2. A quel calcul correspond la valeur 688 ?
3. Effectuer le calcul de l'écart-type de X. A quoi correspond la « différence de 29 écarts-types » ?
4. A quel événement correspond la probabilité de 10^{-140} ? Faites le calcul à l'aide du logiciel Xcas. Etes-vous d'accord ?
5. Peut-on considérer que la consitution des jurys résultait du hasard ?
6. La cour d'appel a donc finalement donné raison à la défense Partida. Cependant, elle exclut une démonstration mathématique de discrimination raciale. N'allez pas croire qu'il y ait eu un complot ! Quel critique pouvez-vous faire sur la modélisation ?
   A votre avis, qu'est-ce qui peut justifier une telle composition de jury ?