TPs
Equation différentielles Linéaires

I) Refroidissement de l'eau

TP Du refroidissement de l'eau (Géogébra + Xcas) + TP5E à adapter pr Xcas et Géogébra

II) Méthode d'Euler

Très peu d'équations différentielles sont résolubles analytiquement, aussi est-on amené à décomposer le problème.
Lorsque l'on est sûr qu'il existe une solution unique à une ED satisfaisant des conditions initiales, on peut utiliser la méthode d'Euler pour en déterminer une valeurs approchées. Cette méthode repose sur l'approximation d'une fonction par ses tangentes successives. Je m'explique sur un exemple.

Considérons le système différentielle $\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Pour diverses raisons, j'affirme à Leonhard que cette ED admet une unique solution, que j'appelle f. Donc

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f' + 2xf = 0 \iff \boxed{f' = -2xf} \quad \text{et} \quad \boxed{f(0) = 1}$$

Leonhard ne sait pas résoudre cette ED, mais il est curieux et se demande à quoi peut bien ressembler sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

1. *Tous ensembles, avec image Géogébra vidéo-projetée*

a. Leonhard sait déjà que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $\boxed{\text{A}(\ldots,\ldots)}$

b. Il a ensuite l'idée ingénieuse de se dire qu'aux environs du point A, la courbe est proche de sa tangente en ce point. Il cherche donc à déterminer son équation.
Leonhard se rappelle l'équation de la tangente à une courbe au point d'abscisse a, bien connue de tous :

$$\boxed{\text{T}_a \ : \ \ldots\ldots \ = \ \ldots\ldots\ldots}$$

c. Ainsi au point A, la tangente à la courbe a pour équation :

$$\text{T}_{\ldots} \ : \ \ldots\ldots \ = \ \ldots\ldots\ldots$$

d. Leonhard utilise alors l'ED donnée pour trouver une expression plus explicite.
Il sait que $f(0) \ = \ \ldots$ Et que $f'(0) \ = \ -2 \ \times \ \ldots\ldots \ \times \ \ldots\ldots \ = \ \ldots\ldots$
Il en déduit donc plus précisément l'équation de la tangente considérée :

$$\text{T}_{\ldots} \ : \ \ldots\ldots \ = \ \ldots\ldots\ldots$$

e. Puisque la courbe $\mathscr{C}_f$ est proche de cette tangente aux environs de A, Leonhard se dit que l'équation de la courbe $\mathscr{C}_f$ est presque celle de cette tangente sur l'intervalle $[0, 1]$, donc que

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) \simeq \ldots$$

Il en déduit que $f(1) \simeq \ldots$ et donc que la courbe passe presque par le point $\text{B}(1, \ldots)$

f. Leonhard recommence alors le processus précédent au point d'abscisse 1.
Il sait que

$$\text{T}_1 \ : \ \ldots\ldots \ = \ \ldots\ldots\ldots$$

Or il a établit que $f(1) \ \simeq \ \ldots$ Et donc $f'(1) \ = \ -2 \ \times \ \ldots\ldots \ \times \ \ldots\ldots \ \simeq \ \ldots\ldots$
Il en déduit alors plus précisément l'équation de la tangente considérée :

$$\text{T}_{\ldots} \ : \ \ldots\ldots \ = \ \ldots\ldots\ldots$$

2. *A vous de jouer !*

a. Leonhard pourrait continuer ce processus, mais il pense qu'il n'a pas été assez précis.
Il reprend donc la méthode précédente, mais décide de ne tracer la première tangente que sur $[0, 0.5]$.
Placer le point A **dans le repère donné et tracer** T_0 **sur** $[0, 0.5]$

b. Leonhard recommence alors sa démarche précédente. Il se dit que l'équation de la courbe $\mathscr{C}_f$ est presque celle de cette tangente sur l'intervalle $[0, 0.5]$, donc que

$$\forall x \in [0, 0.5] \quad f(x) \simeq \ldots$$

Il en déduit que $f(0.5) \simeq \ldots$ et donc que la courbe passe presque par le point $C(0.5, \ldots)$
Placer C

c. Leonhard sait donc que

$$T_{0.5} : \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

Or il a établit que $f(0.5) \simeq \ldots$ Et donc $f'(0.5) = -2 \times \ldots.. \times \ldots.. \simeq \ldots..$
Il en déduit

$$T_{\ldots} : \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

Tracer la tangente considérée sur $[0.5, 1]$**.**

d. Leonhard obtient donc

$$\forall x \in [0.5, 1] \quad f(x) \simeq \ldots$$

STOP PROF

e. Puis Leonhard recommence la démarche précédente sur $[1, 1.5]$.

$$T_1 : \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

Or $f(1) \simeq \ldots$ Et $f'(1) = -2 \times \ldots.. \times \ldots.. \simeq \ldots..$
Ainsi

$$T_{\ldots} : \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

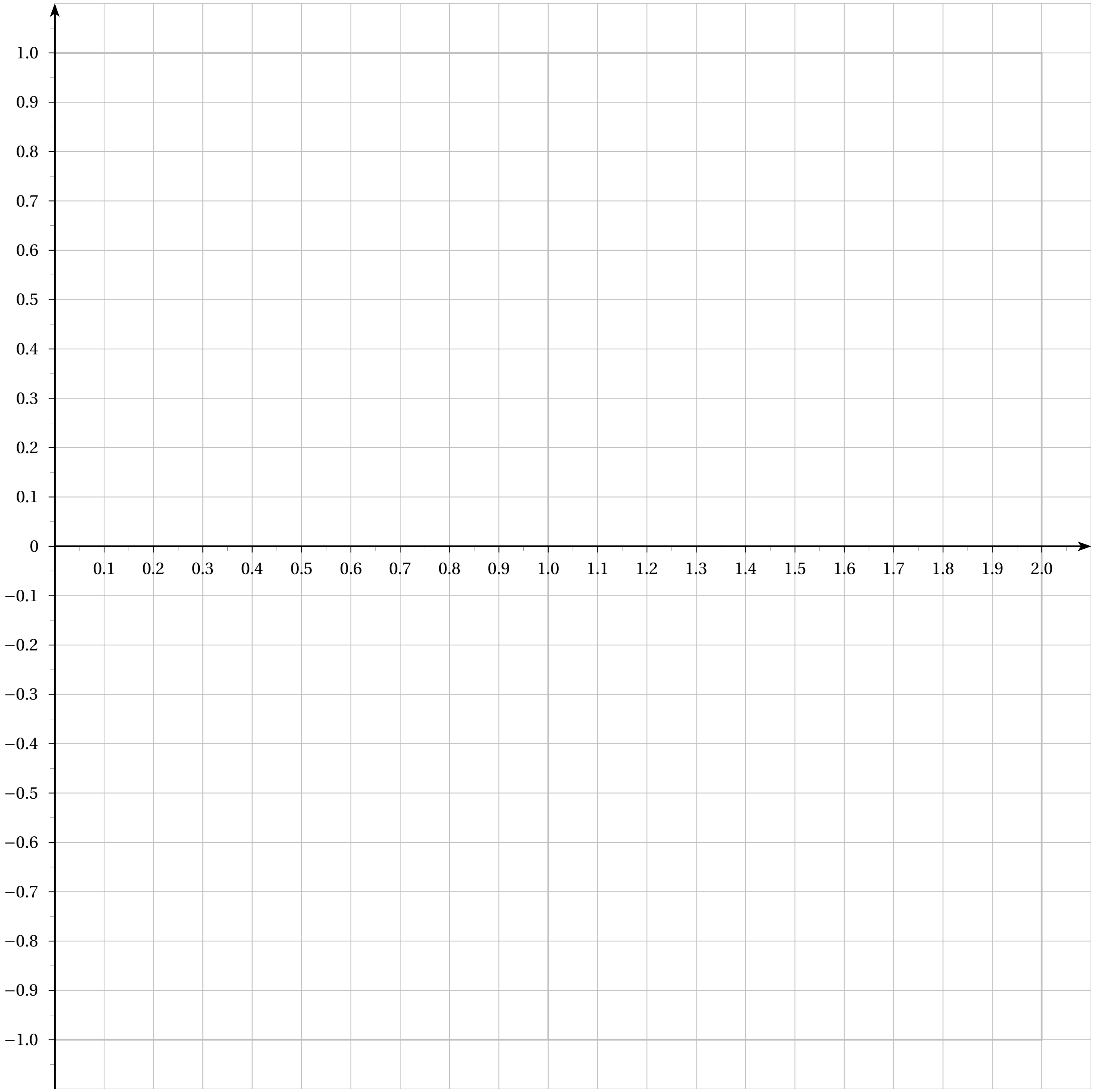
Tracer la tangente considérée sur $[1, 1.5]$**.**
Et donc

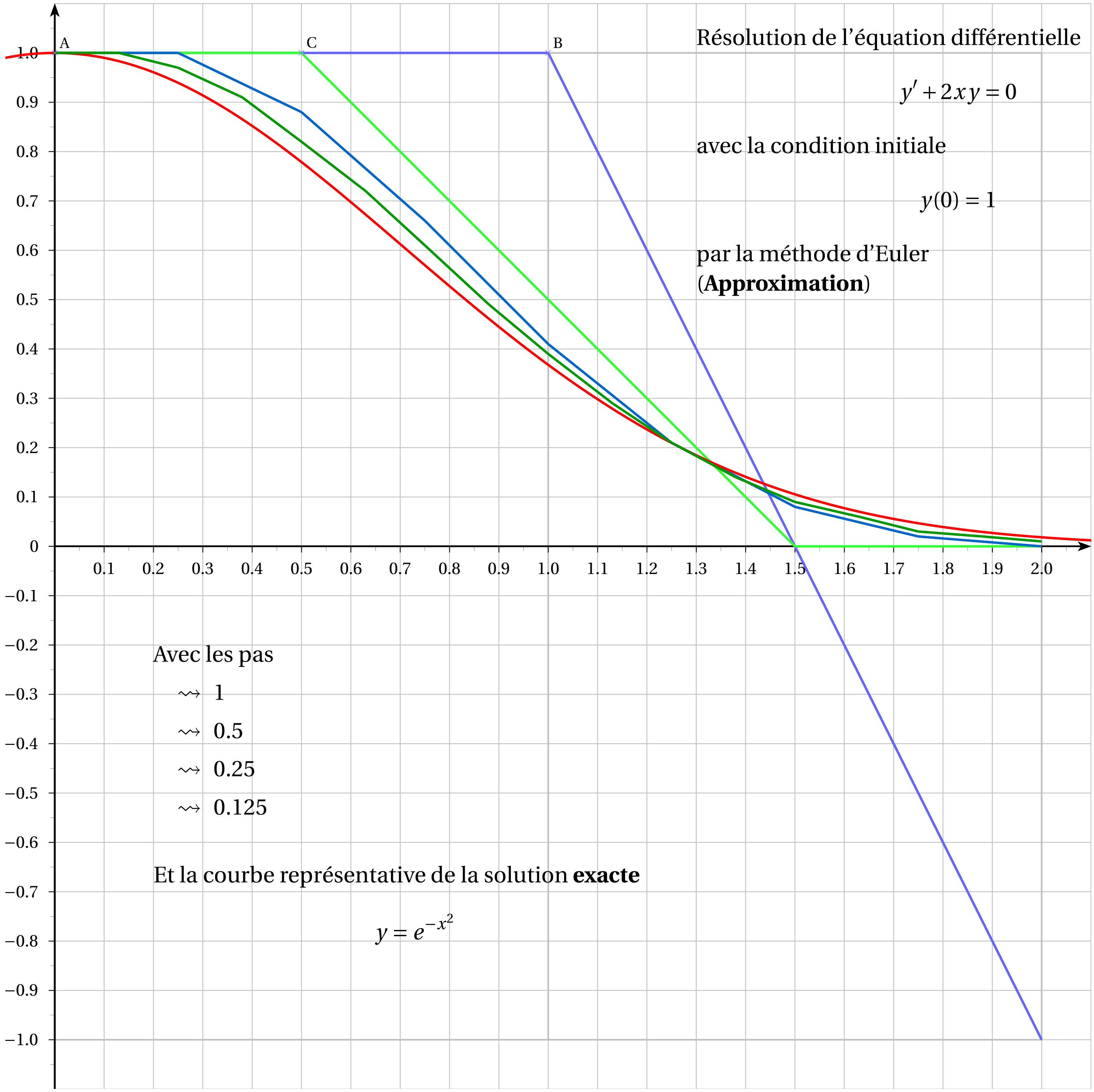
$$\forall x \in [0.5, 1] \quad f(x) \simeq \ldots$$

STOP PROF

f. Réitérer cette démarche sur $[1.5, 2]$

STOP PROF


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
−0.6
−0.7
−0.8
−0.9
−1.0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0


A
C
B
Résolution de l'équation différentielle
$y' + 2xy = 0$
avec la condition initiale
$y(0) = 1$
par la méthode d'Euler
(**Approximation**)
Avec les pas
$\rightsquigarrow$ 1
$\rightsquigarrow$ 0.5
$\rightsquigarrow$ 0.25
$\rightsquigarrow$ 0.125
Et la courbe représentative de la solution **exacte**
$y = e^{-x^2}$