∽ EXERCICES ∽
EQUATION DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1

Applications bêtes et méchantes

Exercice 1 : Résoudre les ED suivantes :

$\rightsquigarrow$ $2y' + 3y = 0$ $\rightsquigarrow$ $4y' + 5y = 0$ $\rightsquigarrow$ $2y' - 3y = 0$

Exercice 2 : Pour chacune des ED suivantes, vérifier que la fonction h est une solution de l'équation proposée, puis résoudre l'ED :

$\rightsquigarrow$ $y' + 2y = 6$; $h(x) = 3$ $\rightsquigarrow$ $y' - y = x$; $h(x) = -x - 1$ $\rightsquigarrow$ $2y' + y = e^x$; $h(x) = \frac{1}{3}e^x$

Exercice 3 : On considère l'ED $y' + 3y = 5$

1. Déterminer le réel a pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = a$ soit une solution de l'ED
2. Résoudre l'ED.

Exercice 4 : Pour chacune des ED suivantes, déterminer la fonction f solution vérifiant la condition initiale donnée :

$\rightsquigarrow$ $y' - 2y = 0$; $f(0) = 2$ $\rightsquigarrow$ $y' + y = 0$; $f(-1) = 3$ $\rightsquigarrow$ $y' + 2y = 0$; $f(0) = 2$

Exercice 5 : On considère l'ED (E) : $y' + 3y = 3$

1. Déterminer le réel a pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = a$ soit une solution particulière de l'ED (E)
2. Déterminer la solution générale g sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée à (E)
3. En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = -1$

Exercice 6 : On considère l'ED (E) : $5y' - y = x$

1. Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x - 5$ est une solution particulière de (E)
2. Déterminer la solution générale g sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée à (E)
3. En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$

Exercice 7 : On considère l'ED (E) : $y' - 2y = -4t$

1. Déterminer une solution particulière h de (E) de la forme $h(t) = \alpha t + \beta$, où α et β sont des constantes réelles à déterminer.
2. Déterminer la solution générale g de l'équation homogène associée à (E).
3. En déduire la solution générale f sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = 3$

Exercice 8 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'ED (E) : $2y' - y = -t^2 + 5t$

1. Déterminer une solution particulière h de (E) de la forme $h(t) = \mathrm{A}t^2 + \mathrm{B}t + \mathrm{C}$, où A, B et C sont trois réels à déterminer
2. Déterminer la solution générale g de l'équation homogène associée à (E).
3. En déduire la solution générale f sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f(-1) = 5$

Exercice 9 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'ED (E) : $y' + y = 2\cos(x)$

1. Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \cos(x) + \sin(x)$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer la solution générale g de l'équation homogène associée à (E).
3. En déduire la solution générale f sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Exercice 10 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'ED (E) : $y' - y = \sin(x)$

1. Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}\big(\cos(x) + \sin(x)\big)$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer la solution générale g de l'équation homogène associée à (E).
3. En déduire la solution générale f sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E)
4. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Type CCF

Exercice 11 : On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - y = \mathrm{e}^x - 2x$$

où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0) : \quad y' - y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^x + 2x + 2.$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 3$.

Exercice 12 : On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - 3y = -\mathrm{e}^{3x}$$

où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0) : \quad y' - 3y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x\mathrm{e}^{3x}$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 13 : Pour tester la résistance à la chaleur d'une plaque d'isolation phonique, on porte en laboratoire sa température à 100° C et on étudie l'évolution de sa température en fonction du temps t en minutes. Soit $\theta(t)$ la température en degrés Celsius de la plaque à l'instant t exprimé en minutes.
La température ambiante du laboratoire est de 19°C et après 6 minutes, la température est redescendue à 82°C. En exploitant ces données, on peut affirmer que la fonction θ est solution de l'équation différentielle :

$$y'(t) + 0.042\,y(t) = 0.798 \qquad (\mathrm{E})$$

où y est la fonction inconnue, de variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$

PARTIE A : **Première partie**

1. Résoudre sur l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation homogène associée à (E)
2. Trouver une solution particulière de (E) constante du type $h(t) = a$ où a est un nombre réel à déterminer.
3. En déduire toutes les solutions de (E)
4. D'après l'énoncé, donner $\theta(0)$ puis déterminer la solution θ de l'équation (E) vérifiant cette condition initiale.

PARTIE B : **Deuxième partie**

1. On admet que pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$\theta(t) = 81e{-}0.042t + 19$$

   a. Tracer à l'écran de votre calculatrice la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction θ pour $0 \leq t \leq 150$

   b. Calculer la température de la plaque après 35 minutes.
   Retrouver graphiquement ce résultat à l'aide de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue sur la calculatrice.

   c. Calculer la fonction dérivée θ'
   En déduire le sens de variation de θ sur $[0; +\infty[$

   d. Calculer le temps à partir duquel la température de la plaque est inférieur à 30°C .
   Retrouver graphiquement ce résultat à l'aide de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue sur la calculatrice.

   e. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t)$ et interpréter ce résultat.