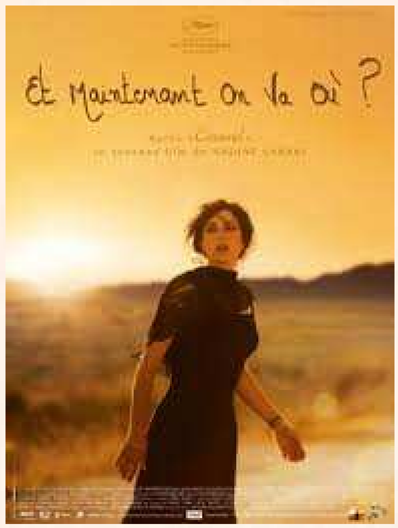
CHAPITRE 4

LOI BINOMIALE



HORS SUJET

Document réalisé à l'aide de LaTeX

Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

TITRE : « Et maintenant on va où ? »
AUTEUR : NADINE LABAKI
PRÉSENTATION SUCCINTE : Nominé pour plusieurs prix « *Et maintenant on va où ?* » , de **Nadine Labaki**, a remporté le prix du Jury Oecuménique – Mention Spéciale à Cannes. Après « *Caramel* » , film déjà primé, la réalisatrice revient sur un thème extrêmement contemporain : la cohabitation religieuse.

Le film s'ouvre sur une scène originale, où, des femmes, drapées de noir, endeuillées, entament une danse esthétiquement précise et émotionnellement forte. Les femmes nous regardent comme si elles assistaient à un spectacle et que donc nous étions le film ce qui renforce l'aspect contemporain du sujet. Il s'agit des femmes d'un village, divisé en deux confessions avec d'un côté les musulmans regroupés derrière leur Cheikh, et de l'autre, les catholiques et leur Prêtre. Lors d'une soirée où ils sont tous regroupés devant la télévision, les habitants regardent le journal télévisé qui leur apprend des affrontements entre catholiques et musulmans. Dès lors, les tensions du passé sont ravivées et les hommes ne jurent plus que par leurs religions laissant les femmes abattues par cette situation, mais cherchant des solutions plus originales les unes que les autres pour garder la paix..

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Revoir les variables aléatoires et les arbres
- ⇝ Découvrir la loi binomiale et les coefficients binomiaux
- ⇝ Connaître et utiliser les formules à bon escient
- ⇝ Visualiser sur un tableur l'allure de l'histogramme de la loi binomiale

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »

JOHN LOUIS VON NEUMANN (RÉALISTE...)

CHAPITRE 4 : LOI BINOMIALE

Au fil du temps

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse, ie **axiomatique** en a été proposée trois siécles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI^{eme} siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu ...
Ainsi, la théorie des probabilités est jeune par rapport aux autres grandes disciplines mathématiques : elle prend réellement forme au XVII^{e} siècle, dans la correspondance entre Blaise Pascal, philosophe, théologien et mathématicien, et Pierre de Fermat, avocat et mathématicien « amateur » comme il se qualifiait lui-même, alors qu'il est l'une des grandes figures mathmétiques modernes (deux théorèmes d'arithmétiques portent son nom, dont l'un ne fut démontré qu'en 1994).
Si les probabilités ont attendu si longtemps avant de voir le jour, c'est peut-être à cause de l'étrangeté philosophique qu'elles véhiculent, à savoir l'idée qu'un événement du monde physique soit pensé non pas dans les termes « il se produit ou il ne se produit pas », mais « il peut se produire avec x% de chances »...
Si on dit qu'il y a 35,4% de chances qu'il pleuve demain à Carcassonne à 11h, cela signifie-t-il qu'il pleuvra réellement à Carcassonne mais seulement à 35,4% et qu'il fera en même temps soleil à 64,6% ? Cela semble un pur non sens ... Ou cela sigifie-t-il que la dynamique atmosphérique porte en elle une indétermination physique qui interdit de prévoir « à 100% » ? Ou enfin qu'il n'y a aucune indétermination physique mais que nous, êtres pensants, n'avons pas assez d'informations et de moyens de calculs pour prédire parfaitement son évolution ? En fait, ces trois façons d'interpréter un résultat de probabilité sont valables, chacune dans un certain domaine.
Ainsi, en mécanique quantique, une particule peut se trouver « ici à 35,4% et là-bas à 64,6% » tant qu'on n'a pas mesuré concrètement sa position (et non pas « ici ou là-bas » !). Les physiciens admettent qu'avant une mesure, une particule unique peut être en plusieurs lieux simultanément...
En ce qui concerne les deux autres interprétations, indétermination physique objective ou manque d'informations du physicien, le débat est ouvert depuis 1958, date à laquelle James Maxwell introduit les probabilités en physique. Pour lui, la température d'un gaz est liée aux probabilités de mouvement des milliards de particules qui le composent ... Très choquant pour les physiciens de l'époque : comment un phénomène aussi réel et objectif que la température d'un gaz peut-il dépendre d'un état de connaissance, c'est-à-dire d'une donnée subjective ? Pourtant, cette théorie est l'une des grandes réussites de la physique moderne ...
Ainsi, si la théorie mathématique des probabilités est aujourd'hui bien comprise et acceptée, dès qu'on cherche à en comprendre le sens physique, l'étonnement reprend le dessus et motive des générations de futurs chercheurs.

C'est en XVIII^{e} siècle que les statistiques endossent quant à elles leur premier grand rôle dans la vie moderne : celui d'un outil de prévision. Le mathématicien Antoine Deparcieu établit dans un livre le « profil » de la mortalité de populations à partir de données statistiques. En se servant des méthodes d'échantillonnage, de calculs de moyennes et d'écart-type, il crée les premières « tables de mortalité » permettant d'évaluer le risque moyen de mort d'un individu en fonction de son profil. Ce risque est alors directement transformé en pécule, rente versée à quelqu'un durant toute sa vie en contrepartie de l'acquisition de son bien à sa mort. Avec Deparcieu, la statistique fait son entrée dans le monde de l'économie.
Mais ce n'est qu'au XIX^{e} siècle que la statistique finit de prendre la place qu'est la sienne aujourd'hui : celle d'une science mathématique mais aussi humaine, omniprésente dans le débat publique. C'est Adolphe Quételet, astronome belge, qui intègre dans un ouvrage toutes les lois de probabilités développées depuis Pascal et Fermat : mesure des erreurs, loi binomiale que vous allez découvrir ici, etc.
Il tente d'établir des lois statistiques des suicides et des crimes en fonction de paramètres comme l'origine sociale, l'âge, le sexe, le climat, le niveau d'études, le revenu, etc. Mais Quételet se voit reprocher de faire de l'homme un être dont le comportement est prédéterminé par des lois mathématiques...

De plus, avec les statistiques sociales, une question se pose : sont-ce les statistiques qui déterminent nos comportements ou l'inverse ? Par exemple, si le taux de meurtriers dans la population est de 5% par an, cela signifie-t-il qu'il existe une sorte de loi qui nous dépasse et qui « oblige » 5% de personnes à se transformer en meutriers ?
Ce type de questionnement hantera tout le XX^e siècle et conduira à de tragiques dérapages où l'on voudra « neutraliser » dès le berceau tout homme né avec les « paramètres statistiques du crime »...

A-t-on besoin de savoir tout ça pour réussir au Bac ? Par exemple, depuis votre tendre enfance, vous calculez avec les nombres entiers sans connaître les axiomes de Peano, vous travaillez en géométrie euclidienne même si elle ne correspond pas à la réalité : avez-vous déjà rencontré un véritable triangle rectrangle ? Et pourtant vous arrivez quand même à démontrer le théorème de Pythagore.
Mais le débat est plus passionné au sujet des probabilités car il a fallu attendre 1933 et le Russe Kolmogorov pour enfin les axiomatiser, alors qu'Euclide avait fait cela pour la géométrie 2300 ans plus tôt...
C'est ce sujet encore brûlant que nous allons explorer cette année à travers quelques chapitres qui sauront, je n'en doute pas, vous passionner !

I) Schéma de Bernoulli

Travail de l'élève 1 : En Syldavie, Norbert, son frère Fabrice et sa mère Laurence, ont monté une équipe nationale de yaks pour le saut d'obstacles.
Le parcours consiste à devoir sauter au-dessus de marres de boue dans lesquelles se prélassent des hippopotames.
Le meilleur yak de l'équipe, Kéké, a une probabilité de 0.7 de réussir un saut quelconque.

1. On appelle X la variable aléatoire qui vaut 1 si Kéké réussit son saut et 0 sinon.
   - **a.** Déterminer la loi de X.
   - **b.** Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Les séances d'entrainement de Kéké contiennent 5 sauts et Kéké a la même probabilité de réussir chacun de ces sauts, indépendamment des sauts précédents.
   On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de sauts réussis de Kéké lors d'une séance d'entrainement.
   - **a.** Quelles valeurs peut prendre Y ?
   - **b.** Quelle est la probabilité que Kéké ne réussisse aucun des 5 sauts ?
   - **c.** Quelle est la probabilité que Kéké réussisse exactement 1 saut ?
   - **d.** Quelle est la probabilité que Kéké réussisse chacun des 5 sauts ?
   - **e.** Quelle est la probabilité que Kéké réussisse exactement 4 sauts ?
   - **f.** Proposer une méthode pour calculer la probabilité que Kéké réussisse exactement 3 sauts.
   - **g.** Donner la loi de probabilité de Y.
   - **h.** Calculer $E(Y)$. Interpréter. Cette valeur vous semble-t-elle logique ?
   - **i.** Calculer $V(Y)$ puis $\sigma(Y)$. Conjecturer une formule simple pour les obtenir.
3. La course de Gattaca contient 10 sauts et Kéké, fort de son entrainement, a désormais une probabilité de 0.8 de réussir chacun de ces sauts, indépendamment des sauts précédents.
   On appelle Z la variable aléatoire qui compte le nombre de sauts réussis de Kéké lors de la course de Gattaca.
   - **a.** Quelles valeurs peut prendre Z ? Lesquelles ont des probabilités rapides à calculer ?
   - **b.** Conjecturer une formule pour calculer les probabilités des autres.
   - **c.** Ces calculs sont-ils encore valables si l'on dote Kéké d'une conscience, et que sa probabilité de réussir un saut dépend de sa réussite au saut précédent ?

Définition 1. (Proposition)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne comportant que 2 issues (Succès et Echec). On note p la probabilité de Succès.
Soit X la variable aléatoire qui est égale à 1 en cas de succès et 0 sinon.
Alors, on dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p. Dans ce cas, on a

$$E(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p)$$

Exemple :

- Pile ou Face.
- Aimer ou non Mireille Matthieu.
- Etre ou ne pas être.
- Lancer un dé et considérer «obtenir 5» comme un succès : $X \hookrightarrow B\left(1;\frac{1}{6}\right)$ et $E(X)=\frac{1}{6}$, $V(X)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$

Preuve

$$E(X) = P(X=0)\times 0 + P(X=1)\times 1 = 0 + p = p$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Remarque : Interprétation des paramètres : Si l'on répète un grand nombre de fois une même expérience de Bernoulli de paramètre p, et de manière indépendante, la fréquence d'un succès sera proche de p, avec un écart-type (ou risque) de $\sqrt{p(1-p)}$.

Définition 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,;\,1]$. On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p toute expérience consistant à répéter n fois une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Si X est la variable aléatoire comptant le nombre de succès dans un tel schéma de Bernoulli, alors, on dit que X suit une **loi binomiale de paramètres n et p**. On note $X \hookrightarrow B(n;p)$.

Remarques :

- Les épreuves de Bernoulli étant de même paramètre p, dans les exercices cela se traduit souvent par la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, c'est-à-dire que les résultats des précédentes n'influent en rien sur les résultats des suivantes, et donc sur leur probabilité de réussite p.
- Si $X \hookrightarrow B(1;p)$, alors X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, tout simplement.

Théorème 1. (Définition)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\ ;\ 1]$ et X variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
Pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$ on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins contenant exactement k succès parmi les n épreuves de Bernoulli, dans l'arbre représentant la situation. Ce nombre (entier) s'appelle un **coefficient binomial** et se lit « k parmi n »

De plus :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = np(1-p)$$

Preuve

La probabilité d'avoir k succès suivis de $n-k$ échecs est : $p^k(1-p)^{n-k}$
Mais les Succès et les Echecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre.... Cependant, on sait par définition qu'il y a $\binom{n}{k}$ chemins de l'arbre qui contiennent k succès parmi les n épreuves (donc $n-k$ échecs) et ces chemins ont tous la même probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ d'être réalisés, car les expériences sont identiques et indépendantes.
On en déduit :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Le reste est admis.

Remarques :

- Si on note q la probabilité d'échec alors $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- La probabilité d'avoir n succès est : $\mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = p^n$
- La probabilité de n'avoir aucun succès est : $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = q^n$
  Par conséquent, on retrouve des résultats déjà connus, comme la probabilité d'avoir au moins un succès est :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 1 - q^n$$

Exemple :

Dans lequel des cas suivants X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner les paramètres de la loi et calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 3)$ si c'est possible, puis l'espérance et la variance de X.

1. Dans une classe, on tire au sort sans remise 5 élèves, X est le nombre d'élèves abonnés à Star'Ac mag dans le lot tiré au sort.
2. Dans un sac de 20 billes contenant 7 noires et 13 blanches, on tire avec remise 3 d'entre elles, X étant le nombre de billes noires obtenues.
3. On lance 4 dés, X est le nombre de 5 obtenus.
4. Un circuit comprend 2 lampes en série. Pour chacune d'elle, la probabilité qu'elle fonctionne est de 0.03. X est le nombres de lampes qui s'allument lorsqu'on appuie sur l'interrupteur.
   Même question avec cette fois des lampes en parallèles.

Exemple :

Combien de branches contient un arbre représentant un schéma de Bernoulli à 4 étapes ?

Déterminer dans cet ordre à l'aide de la définition $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{4}$, $\binom{4}{1}$ et $\binom{4}{3}$. En déduire $\binom{4}{2}$.

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{3}{4}$. On donne $\binom{6}{2} = 15$.

1. Donner sous forme de fraction irréductible les probabilités $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.
2. En déduire $P(X \geq 3)$.

Exercice 2 : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{5}$.
Sachant que $E(X) = 4$, calculer l'écart-type de X.

Exercice 3 : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres 16 et $p \leq \frac{1}{2}$.
Sachant que $\sigma(X) = 1$, calculer l'espérance de X.

Exercice 4 : En syldavie, Norbert fait participer son chat Banshee au jeu des « lancers de souris ».
Le jeu consiste à lancer **quatre fois** fois une souris en l'air et à tenter de la rattraper. Banshee estime que sa probabilité de rattraper une souris est toujours égale à $\frac{3}{5}$
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de souris rattrapée par Banshee lors d'une épreuve (donc lors de **quatre** lancers).

1. Déterminer la loi de X. Justifier.
2. Calculer la probabilité que Banshee rattrape au moins une souris.
3. Calculer la probabilité que Banshee rattrape exactement 1 souris.
4. Calculer la probabilité que Banshee rattrape exactement 2 souris.
5. Calculer $E(X)$. Interpréter.
6. Calculer $\sigma(X)$. Banshee est-il régulier ?

Exercice 5 : Dans une loterie, à chaque jeu on a 5% de chance de gagner. On décide de jouer n fois (avec n entier naturel non nul). Chaque jeu est indépendant des autres.
Soit X la variable aléatoire déterminant le nombre de fois où on gagne à cette loterie lors des n jeux.

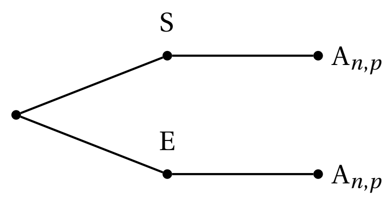
1. Quelle loi suit X ? Donner ses paramètres.
2. Montrer que $P(X > 0) = 1 - 0.95^n$
3. A l'aide d'un tableau de valeurs à la calculatrice, déterminer le plus petit entier n pour laquelle $P(X > 0) \geq 0.5$.
4. Interpréter cette valeur trouvée dans le contexte de l'exercice.

II) Les coefficients binômiaux

II.1. Quelques propriétés pour les trouver à la main

Travail de l'élève 2 : Poser les questions à l'oral

- Conjecturer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les valeurs de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n-1}$
- Une expérience ne précise pas ce qui est considéré comme un succès ou un échec. Cela doit-il changer les probabilités de $P(X = k)$?
  Faire écrire les proba dans les deux cas.
  Que peut-on en déduire sur les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$?
- On note $A_{n,p}$ l'arbre représentant le schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
  Donner $A_{2,p}$ et $A_{3,p}$. Dessiner $A_{4,p}$ en utilisant $A_{3,p}$.
  De même, $A_{n+1,p}$ peut se représenter ainsi :



  A partir cette modélisation, conjecturer une formule permettant de déterminer $\binom{n+1}{k}$ par récurrence.
- Compléter alors le tableau ci-dessous

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
1							
2							
3							
4							
5							
6							

- Vos conjectures des premières questions sont-elles vérifiées ?

Propriété 1.

⇝ **Cas particuliers :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

⇝ **Symétrie :** Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n$ on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

⇝ **Triangle de Pascal :** Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n-1$ on a

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Preuve

On considère un schéma de Bernoulli à n épreuves représenté par un arbre, et k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.

1. Il y a un seul chemin de l'arbre conduisant à 0 Succès (c'est celui correspondant à n Echecs) et inversement. Il y a n chemins dans l'arbre conduisant à 1 Succès (celui où le Succès est placer en 1er, en 2eme, ..., en dernier) et inversement.
2. Compter le nombre de chemins de l'arbre contenant n succès revient par complémentarité à compter le nombre de chemins de l'arbre contenant $n-k$ échecs.
   Par symétrie des rôles des succès et des échecs on a donc :
   $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
3. On considère un schéma de Bernoulli à $n+1$ épreuves représenté par un arbre, et k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$.
   $\binom{n+1}{k+1}$ est, par définition, le nombre de chemins réalisant $k+1$ succès lors des $n+1$ épreuves.
   On peut distinguer deux façons d'obtenir ce type de chemin :
   - ⇝ Ceux finissent par un succès, ie qui contiennent k succès parmi les n premières épreuves : il y en a $\binom{n}{k}$
   - ⇝ Ceux finissent par un échec, ie qui contiennent $k+1$ succès parmi les n premières épreuves : il y en a $\binom{n}{k+1}$

   On obtient alors que
   $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

n \ k	0	1	2	3	4
1					
2					
3					
4					

k	$k+1$

n	$n+1$

n					
$n+1$					

Exercice 6 : Donner sans calcul la valeur des coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{12}{1} \quad \binom{17}{16} \quad \binom{827}{1} \quad \binom{12358}{0} \quad \binom{4651}{4651}$$

Exercice 7 : Sachant que $\binom{101}{2} = 5050$, donner la valeur des coefficients binomiaux suivants sans utiliser la calculatrice :

$$\binom{101}{99} \quad \binom{102}{2} \quad \binom{102}{100}$$

Exercice 8 : A l'aide du triangle de Pascal, déterminer un coefficient binomial auquel chacun de ces nombres correspond en prenant la plus petite valeur de n possible :

$$6 \quad 5 \quad 15 \quad 35 \quad 70$$

En proposer alors deux autres évidents.

II.2. A la calculatrice

voir la feuille d'activités

Exercice 9 : Le druide de Gattaca a besoin pour préparer sa potion magique de champignons syldave. Il envoie 11 vaillants citoyens les chercher. Parsemé de périls et d'embuche on estime qu'un citoyen (aussi vaillant soit-il) a 2 chances sur 17 de périr pour aller dans la forêt et tout autant pour revenir à Gattaca.

1. Calculer la probabilité qu'un citoyen revienne vivant de l'excursion. *on pourra s'aider d'un arbre de probabilité.*
2. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de survivant.

a. Expliquer pourquoi $X \hookrightarrow B\left(11; \dfrac{225}{289}\right)$

b. Calculer la probabilité qu'au moins un citoyen ramène des champignons syldave nécessaire à la préparation de la potion magique.

c. Calculer $p(X=0)$ et $p(X=1)$.

d. En déduire la probabilité qu'au moins deux citoyens ramène des champignons syldave.

e. Calculer $E(X)$. Interpréter.

3. Lance, un jeune cycliste Syldave, n'a pas la permission de consommer les champignons préparé par le druide, il décide donc de se débrouiller tout seul. Pendant une semaine tous les matins, Lance part chercher les fameux champignons et revient le soir afin de les préparer et de les manger.
On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Lance a pu manger des champignons syldave.

a. Donner $p(Y=1)$ et $p(Y=2)$.

b. Recopier et compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(Y=k)$								

Exercice 10 : Le ministre syldave de l'Éducation décide de donner le bac à 80% des enfants dès leur naissance. C'est vrai ! Pourquoi attendre 18 ans et dépenser tant d'argent quand on est même pas sûr du résultat, tout ça pour permettre à des profs d'être payés à être en vacances la moitié de l'année ?
Le ministre découpe donc dans du carton dix carrés numérotés de 1 à 10 et propose au nouveau-né de tirer un carton au hasard.

- si c'est un multiple de cinq, il est recalé,
- si c'est un sept,il obtient la mention « très bien »,
- si c'est un multiple de quatre, il obtient la mention « bien »,
- si c'est un multiple de trois, il obtient la mention « assez bien »
- sinon, il obtient la mention « passable ».

1. Calculer la probabilité pour un nouveau-né syldave d'obtenir le bac avec la mention « passable ».

2. Le village natal du beau-frère du ministre attend sept naissances pour l'année qui suit. On sait qu'il y aura trois filles et quatre garçons [(a)]. On note X la variable aléatoire égale au nombre de garçons bacheliers et Y la variable aléatoire égale au nombre de filles bachelières parmi ces bébés.

a. Déterminer les lois de probabilité de X et Y.

b. Compléter les deux tableaux suivants :

X	0	1	2	3	4	Total
$p(X=k)$	0.0016	……	……	……	……	1

Y	0	1	2	3	Total
$p(Y=k)$	$0,008$	……	……	……	1

c. Calculer la probabilité d'avoir plus de bachelières que de bacheliers. (on pourra s'aider d'un arbre)

d. Calculer la probabilité pour que ce village dépasse l'objectif du ministre.

(a). Comme chacun sait, la capitale syldave s'appelle Gattaca

Exercice 11 : Suite à une étude démographique de la Syldavie, on estime que la probabilité pour qu'un Syldave interrogé au hasard ne connaisse pas par cœur les œuvres du GGC (Grand Guide Charismatique) est de p.
On a classé la population en m groupes de n Syldaves. On va comparer deux stratégies pour détecter les traitres incultes dans chaque groupe :

- la première consiste à interroger les syldaves un par un ;
- on suppose que les services de renseignements syldaves ont mis au point un test rapide permettant de vérifier de manière globale si un groupe contient au moins un traitre. Si ce test global est positif, alors on interroge un a un ses membres pour identifier les traitres, sinon, on passe au groupe suivant.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de traites et Y la variable aléatoire qui compte le nombre de groupe comportant au moins un traite.

1. Déterminer la loi de X et donner son espérance.
2. **a.** On considère un groupe de n syldaves (Z est la variable aléatoire qui compte le nombre de traitre dans ce groupe), démontrer que la probabilité qu'au moins un syldave soit un traitre vaut :

$$p(Z \geq 1) = 1 - (1-p)^n$$

   b. Expliquer pourquoi $Y \hookrightarrow B(m; 1-(1-p)^n)$.
3. On suppose à présent que $p = \dfrac{1}{100}$. Déterminer pour quelles valeurs de n la deuxième méthode est plus économique.

Exercice 12 :
Chaque crocodile qui traverse la clairière séparant les kikis (une espèce très particulière qui vit dans le monde imaginaire des mathématiques...) du fleuve a une probabilité 1/3 de périr écrasé par un éléphant sautant en parachute (tout est permis dans le monde imaginaire des mathématiques...). Un matin, 32 crocodiles quittent les kékés pour rejoindre le fleuve. On note X, le nombre de victimes des éléphants parmi ces crocodiles. Les survivants reviennent le soir par le même chemin. On note Y le nombre total de victimes.

1. Calculer la probabilité que 22 crocodiles se baignent (sans périr) dans le fleuve.
2. Calculer la probabilité que 7 crocodiles retournent sains et saufs le soir dans les kékés.
3. Calculer $E(Y)$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 13 : Un basketteur effectue une série de 7 lancers francs. Il réussit chacun des lancers francs avec une probabilité égale à p.
Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la plus petite valeur de p, à $10-2$ près, telle qu'on soit sûr à plus de 99% que le basketteur réussisse au moins un des sept lancers francs.

Exercice 14 : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On regarde sa couleur puis on la remet dans le paquet que l'on mélange.
On recommence cette expérience 8 fois de suite.

1. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 coeurs. **Justifier précisément !**
2. A chaque fois qu'on tire un coeur, on gagne 3€. Dans les autres cas, on perd 1€.
   Est-il financièrement intéressant de jouer à ce jeu ?

Exercice 15 : **La loi géométrique tronquée**
L'oncle de Tatiana est accroc au jeu de grattage. Chaque semaine, il achète jusqu'à 20 euros de cartes à gratter à deux euros. Il achète une première carte, la gratte. Si elle est gagnante, il s'arrête, sinon il en achète une seconde, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait une carte gagnante ou bien qu'il ait dépensé 20 euros. La probabilité d'avoir une carte gagnante est connu et vaut $0,12$.

1. Modéliser le début de cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que l'oncle achète 4 cartes ?
3. Quelle est la probabilité que l'oncle achète 10 cartes ?
4. Quelle est la probabilité que l'oncle ne gagne rien ?
5. Soit X la variable aléatoire qui à chaque série d'achats de la semaine, associe la somme dépensée.
   - **a.** Etablir la loi de probabilité de X.
   - **b.** Quelle est l'espérance de X ? Interpréter ce résultat.

Exercice 16 : **Algorithme** Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. On considère l'algorithme ci-contre dans lequel :
   - ⇝ « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
   - ⇝ l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.
   - **a.** Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
     $\mathrm{L}_1 = \{2\ ;\ 11\ ;\ 44\ ;\ 2\ ;\ 15\}$;$\mathrm{L}_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
     $\mathrm{L}_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$;$\mathrm{L}_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?
   - **b.** Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

Algorithme 1 :

Entrée(s) :
a, b, c, d, e sont des variables du type entier

$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Tant que $((a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e))$ **Faire**
  $a := \mathrm{rand}(1,\ 50)$; $b := \mathrm{rand}(1,\ 50)$;
  $c := \mathrm{rand}(1,\ 50)$; $d := \mathrm{rand}(1,\ 50)$;
  $e := \mathrm{rand}(1,\ 50)$
Fin Tant que
Afficher a, b, c, d, e

2. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à $0,1$.
3. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.
   - **a.** Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
   - **b.** On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :
     - ⇝ il a été contrôlé 5 fois exactement ;
     - ⇝ il n'a pas été contrôlé ;
     - ⇝ il a été contrôlé au moins une fois.

Exercice 17 : **Algorithme**

On considère l'algorithme ci-contre.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre affiché par cet algorithme.

1. Quelle loi suit X ? Donner ses paramètres.
2. Que faut-il changer dans le programme pour que les paramètres de la loi suivie par X soient 10 et 0.2 ?
3. Programmer cet algorithme sur votre calculatrice ou sur un ordinateur.

Algorithme 2 :

```
Variable(s) :
A, i et C sont des nombres entiers naturels.
Début
    C := 0
    Pour i allant de 1 à 9 Faire
        A prend la valeur d'un nombre entier aléatoire entre 1 et 7
        Si (A > 5) Alors
            C := C + 1
        Fin Si
    Fin Pour
    Afficher C.
Fin
```

Exercice(s) du livre : Algo : n° 50 p 246 (tableur) + 77 (algobox) p 250

n° 68-69 p 249 (somme des coefficients binomiaux)

Programmes sur TI Nspire et TI 89 correspondants :

```
Define LibPub scomb1()=
Prgm
Local n,i,s
Request "n=?",n
0→s
For i,0,n
(-1)^i·nCr(n,i)+s→s
EndFor
Disp s
EndPrgm
```

```
F1▾    F2▾        F3▾ F4▾ F5      F6▾
Outils StructCtrl E/S Var Rech... Mode
:scomb1()
:Prgm
:Prompt n
:0→s
:For i,0,n
:(-1)^i*nbrComb(n,i)+s→s
:EndFor
:Disp s
:EndPrgm
MAIN        RAD AUTO        FONC
```

II.3. Quelques formules pour aller plus loin

Théorème 2.

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemple :

Pour $n = 2$ on retrouve $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Pour $n = 3$ on trouve $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ puis pour $n = 4$ on a :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Il est possible de calculer $(a-b)^5$ avec cette formule via la transformation :

$$\begin{aligned}(a-b)^5 &= (a+(-b))^5 = \binom{5}{0}a^5(-b)^0 + \binom{5}{1}a^4(-b)^1 + \binom{5}{2}a^3(-b)^2 + \binom{5}{3}a^2(-b)^3 + \binom{5}{4}a^1(-b)^4 + \binom{5}{5}a^5(-b)^0 \\ &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5\end{aligned}$$

Preuve

$$(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)$$

Obtenir le terme $a^{n-k} \times b^k$ revient à choisir exactement k fois b et $n-k$ fois a. Il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir k fois b exactement.

Proposition 1.

Pour tout entier naturel n on a :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Preuve

On applique le théorème précédent pour $a = b = 1$. Si on regarde la ligne correspond à $n = 4$ dans le triangle de Pascal alors on a démontré que $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$.

Définition 3.

Si n est un entier naturel alors on note $n!$ le produit que l'on lit n factoriel suivant :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$$

Exemple :

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$

Théorème 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et k un entier compris entre 0 et k alors on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple :

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{120}{6 \times 2} = 10$

Preuve

Cette égalité sera démontrée en terminale.

Définition 4.

Le nombre de listes de longueur n, constituées de 1 et de 0, et ayant k fois l'élément 1 et $n-k$ fois l'élément 0 est égal à $\binom{n}{k}$. C'est également le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments. Ces parties ou ces listes sont appelées des k-combinaisons sans répétition.

Le nombre de suites de n entiers naturels dont la somme vaut k est égale à $\binom{n+k-1}{k}$. C'est aussi le nombre de façons de choisir k éléments d'un ensemble à n éléments si les répétitions sont permises (nombre de combinaisons avec répétition).

Exemple :

D'un point de vue plus intuitif, ce nombre permet de savoir combien de tirages de k éléments parmi n différents on peut réaliser. Les quatre as d'un jeu de cartes sont face contre table, on veut savoir combien de possibilités de jeu il existe si l'on prend simultanément deux cartes au hasard. Si l'on suit la formule il y en a six.
Pour s'en persuader, voici la liste des mains :

1. as de cœur et as de carreau
2. as de cœur et as de trèfle
3. as de cœur et as de pique
4. as de carreau et as de trèfle
5. as de carreau et as de pique
6. as de trèfle et as de pique

Il n'existe pas d'autres possibilités vu que l'ordre n'importe pas (« carreau - pique » est équivalent à « pique - carreau »).

Exemple :

Dans une classe de 28 élèves on peut élire $\binom{28}{2} = \frac{28!}{2!26!} = \frac{28 \times 27}{2} = 14 \times 27 = 378$ couples de délégués différents.

Suggestions d'Applications

- ⇝ La somme des coefficients binomiaux d'une ligne n vaut 2^n (Repère : n° 68-69 (algo) p 249)
- ⇝ Dénombrement : exercice du yams menteur (cf TS)
- ⇝ ...

III) Représentation graphique de la loi binomiale

Exercice(s) du livre : n° 55 p 247 (représentation graphique)

Travail de l'élève 3 : Sur un tableur, on a calculé la table de valeurs et représenté l'histogramme d'une loi binomiale dans trois cas.

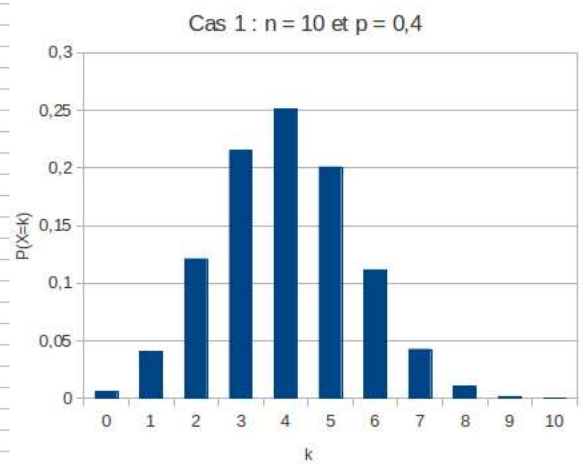
1. Comment décririez-vous l'allure générale de ces histogrammes ?
2. A quoi correspondent les trois premiers paramètres de la ligne de commande entrée en **B6** ?
   Le dernier paramètre égal à 0 *indique au tableur de calculer* $P(X = k)$.
   Il peut également prendre la valeur 1*, et dans ce cas, il indiquerait au tableur de calculer* $P(X \leq k)$.
   Déterminer alors la commande écrite en `B10`.
3. Regardons le cas 1.
   a. Autour de quelle valeur sont situées les valeurs de X les plus probables ?
   b. Cela vous semble-t-il logique ?
   c. A quel paramètre de la loi cela correspond-il ?
   d. Quelles valeurs de X vous semblent obsolètes ? Pourquoi ?
4. Regardons le cas 2.
   a. Déterminer la valeur de n sur l'histogramme.
   b. Déterminer alors la commande écrite en `J6`.
   c. Autour de quelle valeur sont situées les valeurs de X les plus probables ?
   d. Cela vous semble-t-il logique ?
   e. Pourquoi cette valeur ne correspond-elle pas à l'espérance de X ?
   f. Quelles valeurs de X vous semblent obsolètes ? Pourquoi ?
5. Regardons le cas 3.
   a. Déterminer la valeur de n sur l'histogramme.
   b. Autour de quelle valeur sont situées les valeurs de X les plus probables ?
   c. En supposant qu'il s'agit exactement de l'espérance de X, déterminer p.
   d. Déterminer alors les commandes écrites en `B14` et `100`.
   e. Quelles valeurs de X vous semblent obsolètes ? Pourquoi ? Votre critère vous semble-t-il rigoureux ?

B6 =LOI.BINOMIALE(A6;10;0,4;0)

Cas 1

n=10 p=0,4

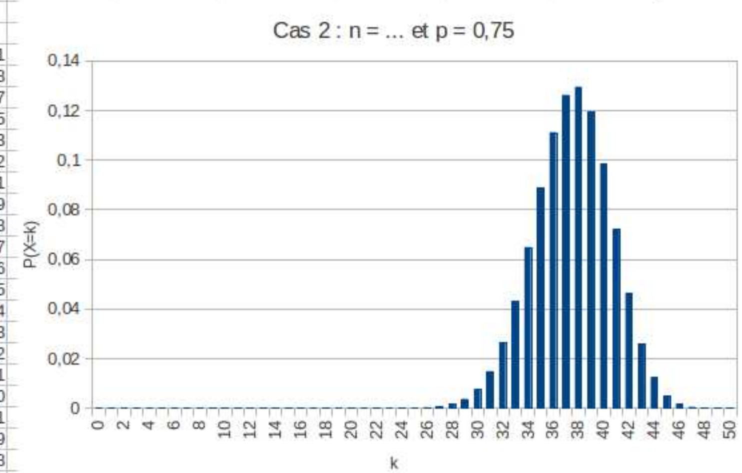
k	P(X=k)
0	0,006046618
1	0,040310784
2	0,120932352
3	0,214990848
4	0,250822656
5	0,200658125
6	0,111476736
7	0,042467328
8	0,010616832
9	0,001572864
10	0,000104858



Cas 2

n= p=0,75

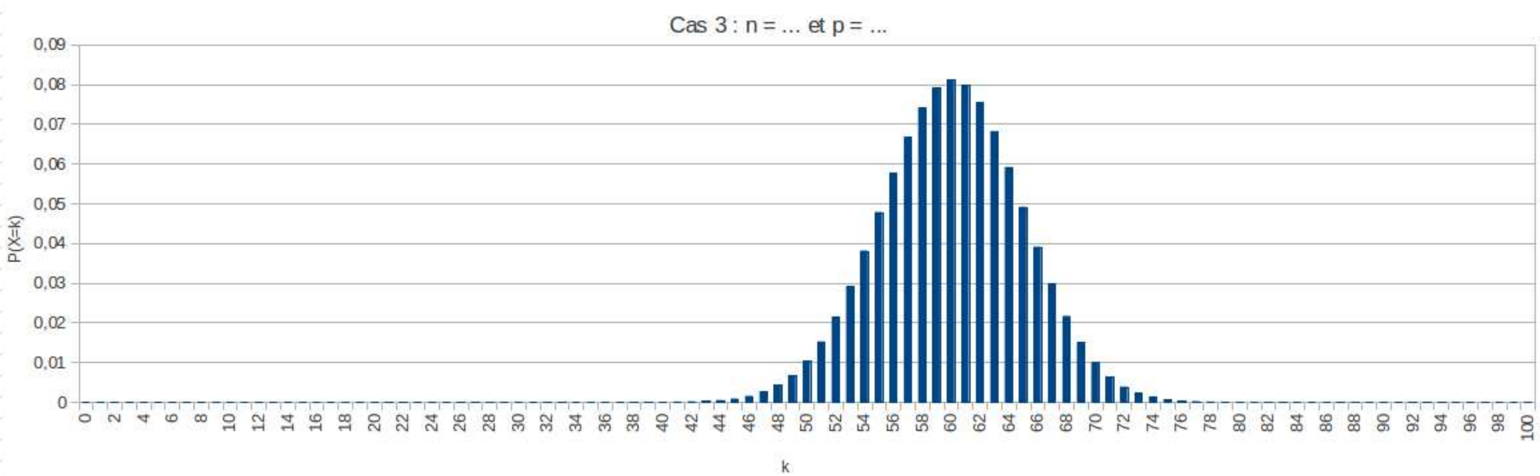
k	P(X=k)
0	7,8886E-031
1	1,1833E-028
2	8,6972E-027
3	4,1747E-025
4	1,4716E-023
5	4,0615E-022
6	9,1384E-021
7	1,7232E-019
8	2,7787E-018
9	3,8902E-017
10	4,7850E-016
11	5,2200E-015
12	5,0895E-014
13	4,4631E-013
14	3,5386E-012
15	2,5478E-011
16	1,6720E-010
17	0,000000001
18	5,5175E-009
19	2,7878E-008
20	1,2963E-007
21	5,5557E-007



Cas 3

n= p=

k	P(X=k)
0	1,6069E-040
1	2,4104E-038
2	1,7897E-036
3	8,7697E-035
4	3,1900E-033
5	9,1871E-032
6	2,1819E-030
7	4,3950E-029
8	7,6639E-028
9	1,1751E-026
10	1,6040E-025
11	1,9686E-024
12	2,1901E-023
13	2,2238E-022
14	2,0729E-021
15	1,7827E-020
16	1,4206E-019
17	1,0529E-018
18	7,2825E-018
19	4,7144E-017
20	2,8640E-016
21	1,6366E-015
22	8,8152E-015
23	4,4843E-014



IV) Problèmes

IV.1. DM 8 : Loi géométrique tronquée

Le « président » de Syldavie pense que les filles de son pays sont trop intelligentes et risquent de renverser son pouvoir, pourtant bien établi depuis 30 ans.
Pour limiter le nombre de filles en Syldavie il décide que chaque famille aura au moins un enfant et arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon, dans un maximum de 4 enfants par famille.
On considère que chaque enfant autant de chances d'être un garçon qu'une fille, indépendamment du sexe d'éventuel(s) enfant(s) précédent(s).
On se demande si ce choix a la conséquence attendue, à savoir de diminuer le nombre de filles dans la population.

1. Combien de fille(s) une famille peut-elle avoir au maximum ? de garçon(s) ?
2. On présente l'algorithme suivant :

Algorithme 3 :

Variable(s) :
X, Enfant, Fille sont des nombres entiers
Entrée(s) :
Enfant= 0, X= 0
Début
    Tant que (X== 0 et Enfant< 4) **Faire**
        Affecter à X un entier aléatoire entre 0 et 1
        Enfant=Enfant+1
    Fin Tant que
    Si (X== 1) **Alors**
        Fille=Enfant−1
        Afficher « La famille a eu », Fille , « fille(s) et 1 garçon »
    Sinon
        La famille a eu 4 filles et 0 garçon
    Fin Si
Fin

   a. Que représente la variable X ?
   b. Que simule la boucle «Tant que» ?
   c. Modifier cet algorithme pour qu'il simule les naissances dans n familles quelconques en Syldavie et qu'il renvoit le nombre total de garçons et le nombre total de filles.
   d. Programmer votre algorithme sur votre calculatrice ou un ordinateur, dans le langage de votre choix.
   Envoyer le par mail ou coller ce programme dans votre devoir
   e. Utiliser ce programme pour conjecturer une réponse au problème posé.
   Coller dans votre devoir un exemple de résultat de votre programme

3. Le « président » de Syldavie appelle S (pour Succès) et E (pour Echec) les événements suivants :
   S : « L'enfant est un garçon » et E : « L'enfant est une fille »
   a. Schématiser la situation par un arbre.
   b. On appelle Y la variable aléatoire égale à k si le premier Succès est rencontré au $k^{ième}$ enfant, et à 0 si aucun Succès n'a été obtenu.
   Déterminer la loi de Y.
   c. Répondre au problème posé.

IV.2. DM 8 bis : Hasard et QCM

Objectif : Etudier, pour une situation modélisable par un schéma de Bernoulli, des variables aléatoires qui suivent ou non une loi binomiale.

Un QCM (Questionnaire à Choix Multiples) est composé de 10 questions numérotées de 1 à 10. Pour chacune d'elles, quatre réponses possibles sont proposées, dont une seule est exacte.
La difficulté réside dans le fait que ce QCM Syldave est en chinois, et que notre candidat Fabrice ne lit pas le chinois (bien qu'il le parle couramment, évidemment). Il se voit donc obligé de répondre à chaque question au hasard, de façon indépendante (Fabrice déteste ne pas répondre du tout, il veut tenter sa chance coûte que coûte).

PARTIE A : Temps d'attente de la première bonne réponse

On désigne par X la variable aléatoire donnant le numéro de la première question à laquelle Fabrice répond juste. On convient que X prend la valeur 11 si toutes les réponses sont fausses.

1. Préciser quelles valeurs peut prendre X.
2. Calculer $P(X=11)$ et $P(X=k)$ pour $1 \leq k \leq 10$
3. X suit-elle une loi binomiale ?

PARTIE B : Attribution d'une note sur 10

1. **Sans pénalité**
   On décide de donner à Fabrice un point par réponse exacte. Soit Y la variable aléatoire associant aux réponses de Fabrice sa note obtenue sur 10.
   a. Justifier que Y suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
   b. Sur un tableur :
      i. Obtenir les valeurs arrondies à 10^{-6} de $P(Y=k)$ pour $0 \leq k \leq 10$.
      ii. Construire l'histogramme correspondant.
      Envoyer votre fichier par mail ou imprimer et coller une copie d'écran dans votre DM
   c. Quelle est la probabilité que Fabrice obtienne la note maximale ?
   d. Quelle est la probabilité qu'il obtienne au moins la moyenne ?
   e. Quelle est la note la plus probabilité de Fabrice ?
   f. Quelle note Fabrice peut-il espérer obtenir (ie quelle note moyenne obtiendrait-il s'il remplissait au hasard un très grand nombre de QCM de ce type)
2. **Avec pénalité**
   Pour pénaliser les candidats qui ne comptent que sur le hasard comme Fabrice, le gouvernement Syldave décide de toujours accorder 1 point par réponse exacte, mais cette fois d'enlever 0.2 point par réponse fausse.
   a. Prouver qu'avec cette nouvelle règle, la variable aléatoire Z donnant la note obtenue par Fabrice s'exprime par $Z = 1,2Y - 2$
   b. En déduire la probablité que Fabrice obtienne une note négative, puis une note supérieur à 5.
   c. Quelle note Fabrice peut-il espérer obtenir ? L'objectif vous paraît-il atteint ?

PARTIE C : Répétitions de QCMs

On suppose que n candidats ($n \in \mathbb{N}^*$) répondent à ce QCM et qu'aucun d'entre eux ne lisant le chinois, ils suivent tous la méthode de Fabrice et sans copier.

1. Quelle est la probabilité P_n qu'au moins un candidat obtienne la note 10 ?
2. Pour quelles valeurs de n cet événement se produira-t-il avec une probabilité supérieur à 0.99 ?

IV.3. Méthode du poolage

Objectif : Etudier une méthode utilisée par exemple pour les tests sanguins

La méthode de poolage est utilisée dans la détection des porteurs d'un parasite au sein d'un ensemble donnée de N individus tirés au sort de façon indépendante, dans une population très vaste par rapport à N (ce qui permet de considérer que le tirage est équivalent à un tirage avec remise).

La proportion de porteurs du parasite dans la population est p $(0 < p < 1)$.

On dispose d'un test permettant de savoir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite, le résultat du test étant dit positif dans le premier cas, négatif dans le second.

Pour chacun des N individus, on possède un prélèvement sanguin.

La méthode de poolage consiste à répartir les N prélèvements par groupes de n prélèvements $(n < N)$.

On mélange les prélèvements des n individus et on teste ces mélanges.

Si le mélange est positif dans un des groupes, on teste le prélèvement de chaque individu du groupe concerné.

La question est de savoir dans quelles conditions le poolage permet d'économiser des tests par rapport au fait de tester chacun des N prélèvements.

Partie A : Etude d'un cas particulier.

On prend $N = 60$ et on fait 20 groupes de 3, que l'on numérote de 1 à 20.

Pour chaque groupe i (i entier de 1 à 20), on note H_i le mélange des prélèvements des trois individus du groupe.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de groupes pour lesquels le test de H_i est négatif.

Soit T la variable aléatoire qui correspond au nombre total de tests effectués.

1. Justifier que la probabilité que le test de H_i soit négatif est $(1-p)^3$.
2. Quelle est la loi de la variable X ? En déduire son espérance mathématique.
3. Prouver que $T = 80 - 3X$ et en déduire l'espérance mathématique de T en fonction de p.
4. Le nombre de tests à effectuer étant de 60 lorsque l'on teste les prélèvements de chaque individu, on considèdre que le poolage est rentable si $E(T)$ est inférieur ou égal à 60.
   a. Justifier que $E(T) \leq 60 \iff \dfrac{1}{3} - (1-p)^3 \leq 0$
   b. Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{3} - (1-x)^3$.
   c. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution, puis en déterminer une valeur approchée à $0,1$ près.
   On pourra utiliser un tableau de valeurs
   d. Conclure en précisant pour quelles valeurs de p la méthode du poolage est rentable.

Partie B : Autre cas particulier

On a toujours $N = 60$, mais cette fois, on fait 15 groupes de 4, que l'on numérote de 1 à 15.

En s'inspirant de la méthode précédente, préciser pour quelles valeurs de p ce poolage est rentable.

Partie C : Un problème d'optimisation

Si N est le nombre d'individus, on fait $\dfrac{N}{n}$ groupes de n individus (on suppose que N est assez grand devant n pour négliger le fait qu'un groupe pourrait ne pas être complet).

La démarche et les notations restent celles de la partie A.

1. Déterminer la loi suivie par X.
2. Exprimer T en fonction de X, puis déduire que $E(T) = N\left(1 + \dfrac{1}{n} - (1-p)^n\right)$
3. Montrer que $E(T)$ est minimal si et seulement si $1 + \dfrac{1}{n} - (1-p)^n$ est minimale.
4. Pour chacune des valeurs suivantes de p : $0,1$; 0.01 et 0.001 déterminer à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur la valeur de n telle que $E(T)$ soit minimale.
5. Vérifier dans chacun de ces cas que le poolage est rentable.

IV.4. TP : Affaire Castaneda contre Partida

Des arguments de type probabiliste peuvent être avancés et pris en compte dans les cours de justice. En novembre 1976, Rodrigo Partida, d'originie mexicaine, était condamné à huit ans de prison pour vol et tentative de viol dans un comté du sud du Texas. Il attaqua le jugement sous motif que la désignation des jurés dans l'Etat du Texas était discriminatoire pour les Américains d'origine mexicaine. Son argument était que ceux-ci n'étaient pas suffisamment représentés dans les jurys populaires.

Attendu de la Cour Suprême des Etats-Unis (affaire Castaneda contre Partida)

« Si les jurés étaient tirés au hasard dans l'ensemble de la population, le nombre d'américains mexicains dans l'échantillon pourrait alors être modélisé par une distribution binomiale ...

Etant donnée que 79.1% de la population est mexico-américaine, le nombre attendu d'américains mexicains parmi les 870 personnes convoquées en tant que grands jurés pendant la période de 11 ans est approximativement de 688. Le nombre observé est 339.

Bien sûr, dans n'importe quel tirage considéré, une certaine fluctuation par rapport au nombre attendu est prévisible. Le point essentiel, cependant, est que le modèle statistique montre que les résultats d'un tirage au sort tombent vraisemblablement dans le voisinage de la valeur attendue ...

La mesure des fluctuations prévues par rapport à la valeur attendue est l'écart-type, défini pour la distribution binomiale comme la racine carré de la taille de l'échantillon (ici 870) multiplié par la probabilité de sélectionner un américain mexicain (ici 0.791) et par la probabilité de sélectionner un non américain mexicain (ici 0.209) ... Ainsi, dans ce cas, l'écart-type est approximativement de 12.

En règle générale, pour de si grands échantillons, si la différence entre la valeur attendue et le nombre observé est plus grande que deux ou trois écarts-types, alors l'hypothèse que le tirage du jury était au hasard serait suspecte à un spécialiste des sciences humaines.

Les données sur 11 années reflètent ici une différence d'environ 29 écarts-types. Un calcul détaillé revèle qu'un éloignement aussi important de la valeur attendue se produirait avec moins d'une chance sur 10^{140}. »

Source : « *Prove it with Figures (Statistics for Social Science and Behaviour Sciences)* », Hans Zeisel et David Kaye ; Springer (2006)

1. Définir la variable aléatoire X qui, dans cette situation, suit une loi binomiale.
   Quels sont les paramètres de cette loi binomiale ?
2. A quel calcul correspond la valeur 688 ?
3. Effectuer le calcul de l'écart-type de X. A quoi correspond la « différence de 29 écarts-types » ?
4. A quel événement correspond la probabilité de 10^{-140} ? Faites le calcul à l'aide d'un tableur. Etes-vous d'accord ?
5. Peut-on considérer que la consitution des jurys résultait du hasard ?
6. La cour d'appel a donc finalement donné raison à la défense Partida. Cependant, elle exclut une démonstration mathématique de discrimination raciale. N'allez pas croire qu'il y ait eu un complot !
   Quel critique pouvez-vous faire sur la modélisation ?
   A votre avis, qu'est-ce qui peut justifier une telle composition de jury ?

Il est alors aussi de notre responsabilité d'être critique à l'égard des chiffres sur lesquels toute la simulation repose. Reprenons donc l'attendu :

« Alors que $79,1\%$ de la population de comté était d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoqués pour être jurés lors d'une certaine période de référence, il n'y eût que 339 personnes d'origine mexicaine. »

Que signifie : « lors d'une certaine période de référence » ? En réalité, cette période de référence correspond à l'étude des listes des jurés lors des 11 années qui ont précédé le jugement de Partida. Sur ces listes, 339 citoyens d'origine mexicaine ont été comptabilisés sur 870. Or, non seulement il n'est pas raisonnable de penser que durant cette longue période la proportion de citoyens d'origine mexicaine est resté constante et égale à $79,1\%$ mais en plus sur la période de deux ans et demi précédent le jugement de l'affaire opposant le shérif Castaneda au prévenu Partida, la proportion de citoyens d'origine mexicaine ayant été membre d'un jury dans ce même comté était d'environ 56%. Cet argument a été soutenu par l'accusation sans succès car la sous représentation des citoyens d'origine mexicaine restait trop importante.

Une deuxième piste pour contredire la thèse du complot repose sur l'étude des modalités de sélection des jurés. D'abord des listes de citoyens sont éditées de manière aléatoire mais ensuite, conformément à la loi, le juge du comté vérifie que le citoyen est alphabétisé et de « bonnes mœurs ». Ainsi, la loi elle-même impose une sous représentation d'une partie de la population qui est moins alphabétisée.

Enfin, il faut remarquer que la cour suprême ne conclut pas à la démonstration formelle de discrimination raciale. Elle précise, en effet : « Etant donné les nombreuses facettes de la motivation humaine, il serait peu approprié de prendre comme loi établie que des humains appartenant à un groupe ne pratiqueront pas de discrimination à l'égard des membres d'un autre groupe ».