CHAPITRE 5

VARIATIONS DE FONCTIONS

HORS SUJET

Document réalisé à l'aide de LaTeX

Auteur : C. Aupérin

Site : wicky-math.fr.nf

Lycée Jules Fil (Carcassonne)

TITRE : « Mommy »

AUTEUR : XAVIER DOLAN

PRÉSENTATION SUCCINTE : Mommy est un film dramatique québécois écrit et réalisé par Xavier Dolan, sorti en 2014.

Il est présenté en compétition officielle au festival de Cannes 2014 où il remporte le Prix du jury1. Dolan, pour sa première participation en compétition (et quatrième sélection au festival) est à 25 ans le plus jeune réalisateur de la sélection. Dans l'histoire du festival, il est le second plus jeune réalisateur à recevoir le Prix du jury, la première étant l'Iranienne Samira Makhmalbaf, récompensée à 20 ans pour Le Tableau noir en 20002. Comme dans le clip College Boy réalisé par Dolan en 2013, le film a la particularité d'être en majorité tourné en format d'image carré 1 :13,4. Mommy a été sélectionné pour représenter le Canada à l'Oscar du meilleur film en langue étrangère lors de la 87e cérémonie des Oscars en 20155

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Connaître l'allure des représentations graphiques et les tableaux de variations des fonctions affines, polynôme de degré 2, inverse, racine carrée et valeur absolue.
- ⇝ Mener des inégalités successives avec les règles de changement de sens
- ⇝ Résoudre des équations et inéquations avec la valeur absolue
- ⇝ Déterminer les variations de fonctions en utilisant les fonctions de référence.

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 5: VARIATIONS DE FONCTIONS

Au fil du temps

Nous allons découvrir de nouvelles fonctions de référence : la fonction racine carré et la fonction valeur absolue. Vous connaissez déjà la fonction carré, la fonction inverse et les fonctions affines.
Au XVI^e siècle, le mathématicien allemand Christoff Rudolff est à l'origine de la notation $\sqrt{}$ dans un traité d'arithmétique. Il s'agit probablement d'un r minuscule déformé. En effet, r est la première lettre du mot « racine » en latin (« radix »). La notation se généralise en XVII^e, grâce notamment au mathématicien français René Descartes.
Karl Weirerstrass (1815-1987), mathématicien allemand considéré généralement comme l'un des plus grands mathématiciens du XIX^e, est à l'origine de la notaion $|x|$ pour la valeur absolue de x. Dans le premier chapitre, nous avons utilisé la fonction carré pour étudier plus généralement les fonctions polynômes de degré 2.
De même ici, nous nous appuieront sur les fonctions de référence pour généraliser des résultats sur d'autres fonctions.

I) Variation de fonction

I.1. Définition

Définition 1.

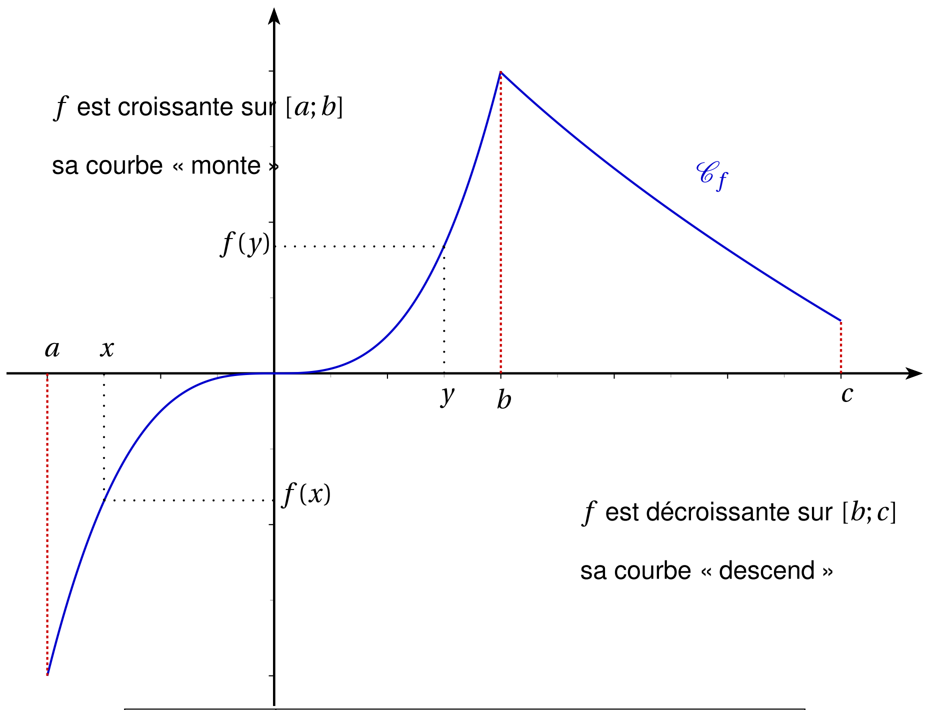
Une fonction f définie sur un intervalle I est dite strictement croissante sur I si et seulement si les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre sur I c'est-à-dire f est strictement croissante sur I si et seulement si f vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

Définition 2.

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite strictement décroissante sur I si et seulement si les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse sur I c'est-à-dire f est éstrictement croissante sur I si et seulement si f vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$



x	a		0		b		c
Variations	$f(a)$	↗	0	↗	$f(b)$	↘	$f(c)$
Signe		$-$	0	$+$		$+$	

Remarques :

- ⇝ On parle de fonctions croissante ou de fonction décroissante uniquement sur un intervalle.
- ⇝ Dire qu'une fonction est **monotone** sur un intervalle signifie qu'elle est soit uniquement croissante, soit uniquement décroissante sur cet intervalle.
- ⇝ Méthode utilisée ici pour étudier le sens de variation d'une fonction de référence f sur un intervalle I :
  - — On pose x et y deux nombres quelconques de l'intervalle I tel que $x < y$.
  - — On calcule $f(x) - f(y)$
  - — On regarde son signe pour conclure.

I.2. Fonctions affines

On considère une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Soit x et y deux antécédents tels que $x > y$; dans ce cas :

$$f(x) - f(y) = ax + b - (ay + b) = ax + b - ay - b = a(x - y)$$

Puisque $x > y$ on obtient $x - y > 0$. Distinguons trois cas :

- Si $a > 0$ alors $a(x - y) > 0$ donc $f(x) - f(y) > 0 \iff f(x) > f(y)$. Nous venons de démontrer que si $x > y$ alors $f(x) > f(y)$; autrement dit f vérifie la propriété des fonctions croissante sur $\mathbb{R}$
- Si $a < 0$ alors $a(x - y) < 0$ donc $f(x) - f(y) < 0 \iff f(x) < f(y)$. Nous venons de démontrer que si $x > y$ alors $f(x) < f(y)$; autrement dit f vérifie la propriété des fonctions décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $a = 0$ alors $a(x - y) = 0$ donc $f(x) = f(y)$ ce qui montre que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$

Propriété 1.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 0$; f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a < 0$.

Exemple :
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = -2x + 1$. D'après la propriété précédente f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $a = 3 > 0$ et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque $a = -2 < 0$.

I.3. Fonction carré

(Définition + Preuve du sens de variation)

Travail de l'élève 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On se propose de démontrer que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

1. On considère deux nombres réels x et y, démontrer que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
2. Déterminer alors le signe de $x^2 - y^2$ lorsque :

   a. x et y sont postifs. **b.** x et y sont négatifs.

3. Conclure.

Rappels sur la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Soit f une fonction polynôme de degré 2, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
- Sa courbe représentative est une **parabole** d'équation $y = ax^2 + bx + c$
- Il existe deux réels α et β uniques tels que pour tout réel x on a $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
  On appelle cette écriture la **forme canonique** de f.
- On a les tableaux suivants :

— Si $a > 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

— Si $a < 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

I.4. Fonction inverse

Définition 3.

La fonction inverse est la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété 2. (Définition)

- L'ensemble de définition de la fonction inverse est : $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
- Sa courbe représentative est une **hyperbole**.
- On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations		↘	‖	↘	
Signe		$-$	‖	$+$	

Preuve

A faire en cours

II) Racine Carrée

II.1. Définition

Définition 4.

Soit a un nombre réel positif alors l'unique nombre positif dont le carré vaut a est appelé racine carré de a et on le note $\sqrt{a}$. On obtient donc immédiatement :

1. $\sqrt{a} \geq 0$
2. $a \geq 0$
3. $\sqrt{a}^2 = a$

Exemple :

$\sqrt{9} = 3$ puisque $3 \times 3 = 9$. $\sqrt{2} \simeq 1,41$ puisque $1,41 \times 1,41 \simeq 2$.

Remarque : Le carré d'un nombre étant toujours positif, il n'existe pas de nombre réel qui élevé au carré donne un nombre négatif ; par conséquent la racine carré d'un nombre négatif n'existe pas (du moins dans $\mathbb{R}$).

Définition 5.

La fonction qui a tout réel positif x associe le réel $\sqrt{x}$ est appelé fonction racine carrée.
Elle est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$

Exemple :

L'image de 2 par cette fonction f vaut $f(2) = \sqrt{2} \simeq 1,41$. De plus tout nombre réel positif y admet un unique antécédent par f :

$$f(x) = y \Longleftrightarrow \sqrt{x} = y \Longrightarrow \sqrt{x}^2 = y^2 \Longrightarrow x = y^2$$

Par exemple l'antécédent de 3 est $3^2 = 9$ puisque $\sqrt{9} = 3$

II.2. Relation entre le carré et la racine carrée

Soit x un nombre réel positif, l'image de x par la fonction racine carrée est $\sqrt{x}$ et l'image de $\sqrt{x}$ par la fonction carrée est $\sqrt{x}^2 = x$. Ainsi l'élévation au carré est le processus réciproque de la racine carrée.

On dit que la fonction racine carrée est la fonction réciproque de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$; mais quelle(s) relation(s) cela implique-t-il entre ces deux fonctions ?

Les points suivants appartiennent tous à la représentation graphique de la fonction carrée :

$$(0;0) \qquad (1;1) \qquad (2;4) \qquad (3;9) \qquad (\sqrt{2};2)$$

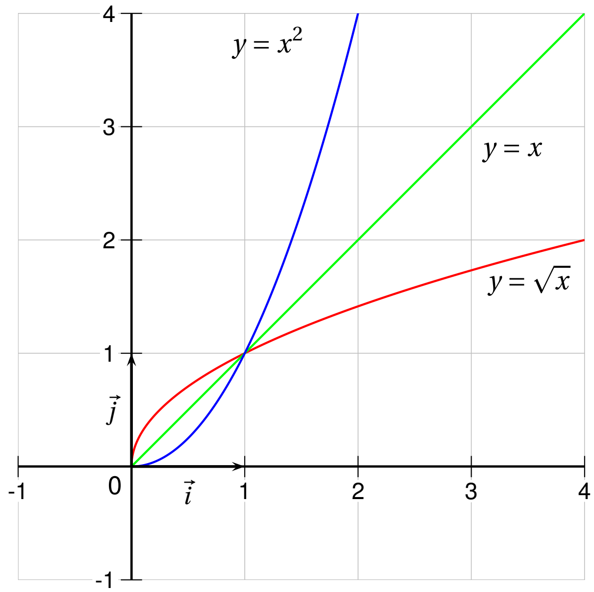
et les points suivants appartiennent eux à la représentation graphique de la fonction racine carrée :

$$(0;0) \qquad (1;1) \qquad (2;\sqrt{2}) \qquad (4;2) \qquad (9;3)$$

Pour passer des points de la représentation graphique de la fonction carrée à ceux de la fonction racine carrée il suffit d'échanger les abscisses et les ordonnées ce qui implique que :

Propriété 3.

Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction carré et $\mathscr{C}'$ la représentation graphique de la fonction racine carrée dans un repère alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



De la symétrie entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ on déduit immédiatement la propriété suivante :

Propriété 4.

1. Si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x\sqrt{x}$;
2. Si $x > 1$ alors $\sqrt{x} < x < x^2$

Exemple :

Pour $x = 0,5$ on a $\sqrt{0,5} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7$ et $x^2 = 0,5 \times 0,5 = 0,25$. On retrouve bien $x^2 < x < \sqrt{x}$.

II.3. Variations de la fonction racine carrée

Théorème 1.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Preuve

Considérons deux réels x et y positifs tels que $x > y \Longleftrightarrow x - y > 0$ alors :

$$\sqrt{x}-\sqrt{y} = \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} = \frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

D'une part $x - y > 0$ et d'autre part $\sqrt{x}+\sqrt{y} > 0$ donc $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} > 0$ donc $\sqrt{x}-\sqrt{y} > 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y}$; on vient de démontrer que sur $\mathbb{R}^+$:

$$x > y \Longrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y}$$

La fonction racine carrée vérifie donc la propriété des fonctions croissante sur $\mathbb{R}^+$.

II.4. Variations de $x \longmapsto \sqrt{ax+b}$

Propriété 5.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et g une fonction définie par $g(x) = \sqrt{x}$.
Si f est strictement (dé)croissante sur $\mathbb{R}$ alors g est strictement (dé)croissante sur son ensemble de définition.

Preuve

Démontrons cette propriété dans le cas où f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:
Soit x et y deux antécédents dans D_g (l'ensemble de définition de g) tels que $x > y$
alors $f(x) < f(y)$ puisque f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Enfin $\sqrt{f(x)} < \sqrt{f(y)}$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Au final on a démontré que si $x > y$ alors $g(x) < g(y)$ ce qui montrer que g est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

Exemple :

Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{3x-4}$.
Tout d'abord g est définie lorsque $3x - 4 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \dfrac{4}{3}$; donc g est définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{4}{3};+\infty\right[$.
Enfin la fonction affine f définie par $f(x) = 3x-4$ est croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $3 > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur $\left[\dfrac{4}{3};+\infty\right[$.

II.5. Vers la valeur absolue

Par définition on sait que pour $x \geq 0$ on a $\sqrt{x}^2 = x$. Mais qu'en est-il de $\sqrt{x^2}$?
Cette fois puisqu'un carré est toujours positif on peut calculer $\sqrt{x^2}$ même pour des valeurs de x négative.
Par exemple

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Contre toute attente :

$$\forall x < 0, \qquad \sqrt{x^2} \neq x$$

D'une manière générale on a $\sqrt{x^2} = \pm x$; plus précisément $\sqrt{x^2} = x$ si $x \geq 0$ et $\sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$. Systématiquement $\sqrt{x^2}$ donne « la valeur positive de x ».

Définition 6.

On appelle valeur absolue du réel x le nombre noté $|\, x \,|$ et définie par :

$$|\, x \,| = \sqrt{x^2}$$

Exemple :

$|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ et $|\,5\,| = \sqrt{5^2} = \sqrt{5} = 5$

III) Valeur absolue

III.1. Définition

Définition 7.

La fonction qui à tout réel x associe le réel $|\, x \,|$ est appelée fonction valeur absolue

Exemple :

Cherchons les antécédents de 5 par cette fonction.
Pour cela on doit résoudre l'équation $|\, x \,| = 5$ ce qui équivaut à :

$$\sqrt{x^2} = 5 \iff x^2 = 25 \iff x = \pm 5$$

Il existe donc deux nombres dont la valeur absolue vaut 5, il s'agit de 5 et -5.
Cherchons les antécédents de -7 par cette fonction. On doit résoudre l'équation $\sqrt{x^2} = -7$. Puisque la racine carrée d'un nombre donne toujours un résultat positif, cette dernière équation n'admet pas de solution. Par conséquent il n'existe aucun nombre réel dont la valeur absolue vaut -7.

Comme souvent en mathématiques il existe différentes manières de définir la valeur absolue, toute équivalentes bien entendu, en voici deux autres :

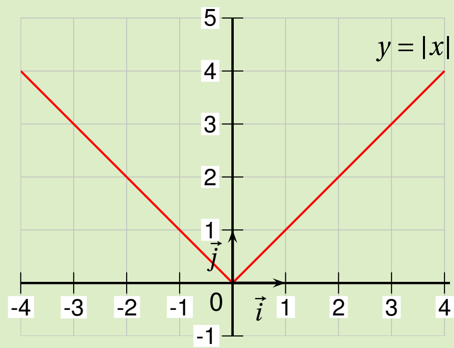
Définition 8.

Soit x un nombre réel alors :

1. $|\,x\,| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

2. $|\,x\,| = d(0,x)$ où $d(0,x)$ est la distance entre 0 et x, une fois x placé sur l'axe des abscisses.

En utilisant la première des deux définitions précédentes on déduit que la représentation graphique de la fonction valeur absolue est la réunion des demi-droites d'équation $y = -x$ sur $\mathbb{R}^-$ et $y = x$ sur $\mathbb{R}^+$ ce qui donne :



Propriété 6.

On considère deux nombres réels x et y alors la distance qui sépare x de y est noté $d(x;y)$ et vaut :

$$d(x;y) = |\,x - y\,|$$

Preuve

Distinguons deux cas :

Si $x \geq y$ alors $d(x;y) = x - y$ et $|\,x - y\,| = \sqrt{(x-y)^2} = x - y$ puisque $x - y \geq 0$.
On vient donc de démontrer que si $x \geq y$ alors $d(x;y) = |\,x - y\,|$

Si $y \geq x$ alors $d(x;y) = y - x$ et $|\,x - y\,| = \sqrt{(x-y)^2} = -(x-y) = y - x$ puisque $x - y \leq 0$.
On vient donc de démontrer que si $y \geq x$ alors $d(x;y) = |\,x - y\,|$.
Par conséquent dans tous les cas on a $d(x;y) = |\,x - y\,|$.

Exercice 1. Un chien errant a été signalé sur une autoroute à moins de 3 km de la borne kilométrique 50, mais à plus de 5 km de la borne 54. On appelle x le réel qui repère la position du chien sur l'autoroute.

1. Traduire l'énoncé en utilisant des valeurs absolues.
2. Entre quelles bornes kilométriques de l'autoroute ce chien peut-il se trouver ?

III.2. Résolution d'équation

Propriété 7.

Soit x un réel et $a \geq 0$ alors $|x| = a \Longleftrightarrow x = \pm a$

Preuve

l'équation $|x| = a$ qui équivaut à :

$$\sqrt{x^2} = a \Longleftrightarrow x^2 = a^2 \Longleftrightarrow x = \pm a$$

Exemple :

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations :

1. $|2x| = 1$ **2.** $|5 - x| = 2$ **3.** $|-7x + 5| = 3$

III.3. Résolution d'inéquation

Propriété 8.

Soit x un réel et $a \geq 0$ alors $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$

Preuve

l'équation $|x| \leq a$ qui équivaut à :

$$\sqrt{x^2} \leq a \Longleftrightarrow x^2 \leq a^2 \Longleftrightarrow x^2 - a^2 \leq 0 \Longleftrightarrow (x-a)(x+a) \leq 0$$

On conclut en utilisant un tableau de signe.

Exemple :

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations :

1. $|2x| \leq 6$ **2.** $|5 - x| \leq 7$ **3.** $|-7x + 5| \leq 8$

Propriété 9.

Soit x un réel et $a \geq 0$ alors $|x| \geq a \Longleftrightarrow x < -a$ ou $x > a$

Preuve

l'équation $|x| \leq a$ qui équivaut à :

$$\sqrt{x^2} \geq a \Longleftrightarrow x^2 \geq a^2 \Longleftrightarrow x^2 - a^2 \geq 0 \Longleftrightarrow (x-a)(x+a) \geq 0$$

On conclut en utilisant un tableau de signe.

Exemple :

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations :

1. $|2x| \geq 4$ **2.** $|5 - x| \geq 5$ **3.** $|-7x + 5| \geq -8$

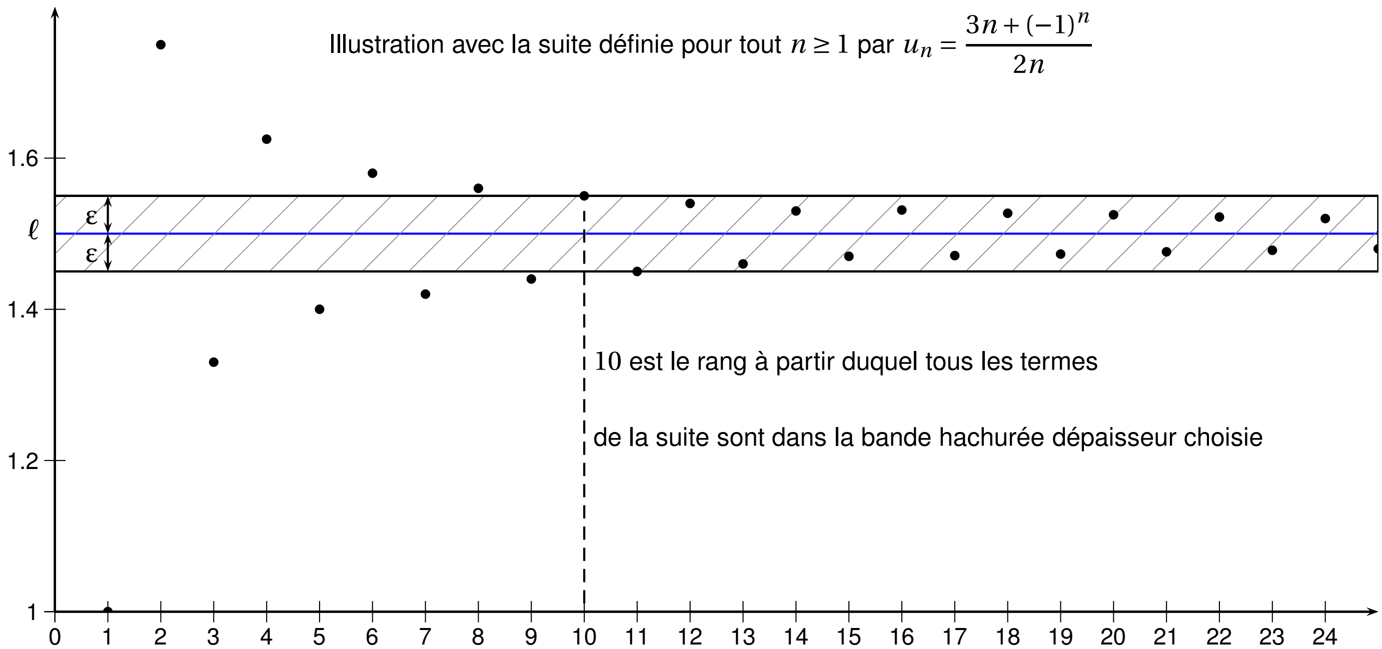
III.4. Valeur absolue et suite convergente

Il est désormais possible de donner la définition mathématiques pour caractériser la convergence d'une suite vers un réel ℓ.

Observons le graphique suivant où l'on a placé les premiers termes de la suite définie par :

$$u_n = \frac{3n+(-1)^n}{2n}$$

Exemple :



- Le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{3}{2}$
- Ici on a choisi $\varepsilon = 0.05$ et on a trouvé que tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]1.45;1.55[$ pour $n \geq 10$.

  ce qui se traduit par :

  $$\forall n \geq 10 \qquad \text{alors} \qquad \ell - 0,05 < u_n < \ell + 0,05$$

  c'est-à-dire :

  $$\forall n \geq 10 \qquad \text{alors} \qquad -0,05 < u_n - \ell < 0,05 \Longleftrightarrow | u_n - \ell | < 0,05$$

- Si on avait choisi $\varepsilon = 0.1$, on aurait trouvé que pour $N = 5$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]1.4;1.6[$ pour $n \geq 5$.
- Si on avait choisi $\varepsilon = 0.04$, on aurait trouvé que pour $N = 13$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]1.46;1.54[$ pour $n \geq 13$.

D'une manière générale quelque soit la largeur de la bande ϵ, il existe un rang N à partir duquel on a $| u_n - \ell | \leq \epsilon$
Cette propriété caractérise les suites convergentes :

Définition 9.

Soit (u_n) une suite.
La suite u converge vers un réel ℓ si et seulement si quelque soit le nombre positif ϵ, il existe un rang N à partir duquel $| u_n - \ell | \leq \epsilon$

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = 4 + \frac{1}{n}$$

. Il semble naturel de conjecturer que :

$$\lim_{n\to+\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4$$

Démontrons le.

Soit ϵ un nombre réel positif. Pour cela il s'agit de prouver qu'à partir d'un certain rang n (nous partons à sa recherche) on a :

$$| u_n - 4 | \leq \epsilon$$

On a :

$$| u_n - 4 | \leq \epsilon \Longleftrightarrow -\epsilon \leq u_n - 4 \leq \epsilon \Longleftrightarrow -\epsilon \leq 4 + \frac{1}{n} - 4 \leq \epsilon \Longleftrightarrow -\epsilon \leq \frac{1}{n} \leq \epsilon$$

Puisque n désigne un entier naturel on a toujours $\frac{1}{n} > 0$ et donc on a toujours $\frac{1}{n} > -\epsilon$, par conséquent :

$$-\epsilon \leq \frac{1}{n} \leq \epsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{n} \leq \epsilon$$

On passe à l'inverse :

$$\frac{1}{n} \leq \epsilon \Longleftrightarrow n \geq \frac{1}{\epsilon}$$

Nous venons de démontrer que pour tous les entiers supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$ alors $| u_n - 4 | \leq \epsilon$ ce qui prouve donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4$$

Cette démonstration est délicate, prenons le temps de regarder quelques exemples :

- Si $\epsilon = 0,001$ alors $\frac{1}{\epsilon} = 1000$, nous avons prouvé que pour tout entier $n \geq 1000$ l'écart entre u_n et 4 est inférieur à $0,001$. En effet :

$$u_{1000} = 4 - \frac{1}{1000} = 3,999$$

- Si $\epsilon = 0,00001$ alors $\frac{1}{\epsilon} = 100000$, nous avons prouvé que pour tout entier $n \geq 100000$ l'écart entre u_n et 4 est inférieur à $0,00001$. En effet :

$$u_{100000} = 4 - \frac{1}{100000} = 3,99999$$