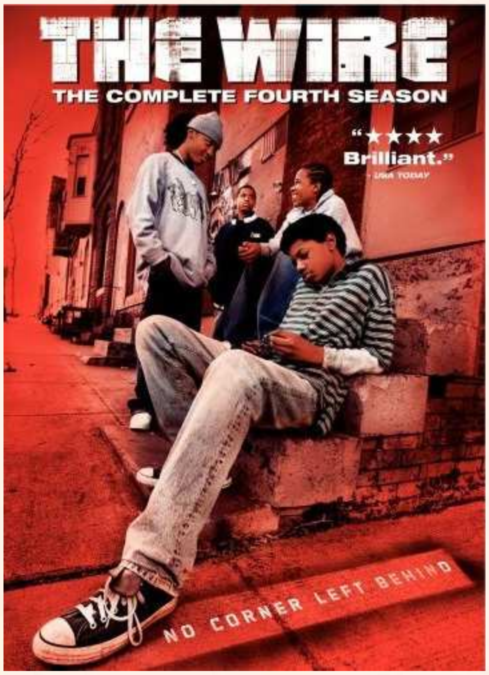
CHAPITRE 1

VARIABLES ALÉATOIRES

HORS SUJET



TITRE : « The Wire »
AUTEUR : DAVID SIMON
PRÉSENTATION SUCCINTE : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et Ed Burns.
Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.
Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.
Le tour de force de la série est de s'engager, sur le plan social, en montrant sans détour les pans les plus sombres du décor américain, son revers le plus inavouable, tout en mettant en scène une multitude de points de vue réalistes qui multiplient les questions dérangeantes sans jamais proposer de solution miracle. Il n'y a pas de fausse objectivité rassurante et pas de subjectivité accusatrice sous-jacente, l'épisode ne fait que montrer le plus passivement possible, il en résulte un étrange bourdonnement qui persiste longtemps après sa diffusion.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire
- ⇝ Connaître les formules d'espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire
- ⇝ Interpréter ces caractéristiques

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 1 : VARIABLES ALÉATOIRES

Au fil du temps

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent axiomatique) en a été proposée trois siécles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI^e siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu (c'est d'ailleurs pourquoi on en a gardé le vocabulaire).

Parmi toutes les définitions possibles du hasard, nous en retiendrons deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

- pour certains, tout a une cause, et le hasard n'est le reflet que de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature. Cet esprit souffla particulièrement au XVIII ème siècle au moment où Laplace posa les bases d'une première théorisation des probabilités. Les probabilités sont alors déterminées a priori, par des considérations non expérimentales. Par exemple, un dé a six faces, donc, on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de $\frac{1}{6}$. Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de Pascal, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourrir à l'expérience. Elle implique la notion centrale d'équiprobabilité : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
  Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ?
- pour d'autres, le hasard constitue notre univers, i.e qu'il n'est pas qu'une abstraction mathématiques mais une réalité physique. La théorie du chaos mise en forme par René Thom en 1955 montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent pas de prévoir mieux des états possibles futurs.

Alors, le hasard, une réalité physique ou une invention mathématiques ? Au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent et il faut les avoir en tête. Ces deux notions ont en commun de postuler que l'issue de l'expérience (le jeté d'un dé) est indépendant de l'observateur, mais ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie ou la physique quantique.

Dans ce chapitre, nous allons revoir les bases des probabilités, à savoir la construction de modèles pour décrire des expériences aléatoires, ainsi que le vocabulaire et les propriétés de base. Le besoin d'avoir une méthode systématique de modélisation est justifié par le fait que certains résultats nous semblent parfois intuitivement évidents mais sont en réalité faux, comme en témoignent les problèmes d'introduction ci-dessous.
Ensuite, nous découvrirons les variables aléatoires, qui associent des résultats d'expériences aléatoires à des variables telles qu'un gain éventuel. Nous apprendrons alors à déterminer certains paramètres de ces expériences, telles que le gain que l'on peut espérer gagner ou le risque d'un jeu, sans avoir à le réaliser.

I) Se souvenir ...

I.1. Les limites de l'intuition

Proposer à l'oral ces petits problèmes et noter la conclusion et la suite à l'écrit

Objectifs :

- Etablir une discussion au sein de la classe et éveiller la curiosité,
- Percevoir les intuitions de chacun (il n'est pas prévu de les faire répondre rigoureusement, simplement de trouver des pistes de solution),
- Rappeler ce qu'est une modélisation mathématique et constater son utilité,
- Rappeler le vocabulaire ainsi que quelques bases sur les probabilités.

Problèmes :

1. Au XVI^e siècle, le Grand Duc de Toscane demanda au vénérable Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 au jeu de passe-dix (jeu consistant à jeter 3 dés et à faire plus que 10), même s'il n'y a dans les deux cas que 6 combinaisons pour les obtenir.
La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier », il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir.
Proposer une explication à ce phénomène.

2. Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante : il y a trois portes, derrière l'une d'entre elles se trouve 10000€ et rien derrière les deux autres. Un candidat choisit au hasard l'une des trois. Ensuite le présentateur élimine une des deux mauvaises portes, tout en conservant celle choisie par le candidat. Le candidat peut alors conserver son choix ou le changer.
Que vaut-il mieux faire pour le candidat, changer ou conserver son choix ?

3. A votre avis, quelle est la probabilité que dans un groupe de 35 personnes indépendantes, deux personnes aient leur anniversaire le même jour de l'année ? Dans un groupe de 70 personnes ?
A votre avis, combien doit-on réunir de personnes pour avoir au moins une chance sur deux que deux personnes de ce groupe aient leur anniversaire le même jour de l'année ?

***Solution* :**

1. Le Duc ne tient pas compte de l'ordre des dés !
2. Le candidat a 2 chances sur 3 de s'être trompé à la première étape, il vaut donc mieux changer.
Reprendre éventuellement l'énoncé avec 100 portes.
3. on a respectivement : $\simeq 81\%$, $\simeq 99\%$, 23 personnes.
En fait à partir de 57 personnes, la probabilité dépasse 99% !

Conclusion

L'intuition ne permet pas toujours de résoudre des problèmes de probabilité. De plus, on est souvent amené à devoir la justifier pour être sûr de nos réponses ou convaincre d'autres personnes.
La théorie des probabilités vit le jour au XVI^{e} siècle pour cela.
La première chose à faire pour résoudre un problème de probabilités est de **modéliser** l'expérience aléatoire considérée.

Exemple :

Considérons un dé truqué où tous les nombres ont les mêmes chances d'apparitions sauf 1 et 2 qui apparaîssent deux fois plus.
Déterminer la probabilité d'avoir 6.

Solution **:**

On peut choisir comme univers pour cette expérience l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
La loi de probabilité P convenant alors est telle que :

$$\mathrm{P}(3) = \mathrm{P}(4) = \mathrm{P}(5) = \mathrm{P}(6) = a \quad \text{et } \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = 2a$$

On se rappelle que l'on doit avoir $\sum_{i=1}^{6} \mathrm{P}(i) = 1$ d'où

$$2a + 2a + a + a + a + a = 1 \Longleftrightarrow 8a = 1 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{8}$$

Au final, on peut résumer la modélisation cette expérience dans le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Conclusion

Lors de la **modélisation** d'une expérience aléatoire, on est amené à *choisir* successivement :

- Un ensemble contenant au moins toutes les **issues/éventualités** possibles de l'expérience : on l'appelle **univers** (souvent noté Ω).
- Des **probabilités** pour chacune des issues de cet univers (respectant 3 règles) : on parle de **loi de probabilité** sur Ω .
  Cette modélisation est souvent présentée sous forme de tableau ou d'un arbre.

Définition 1.

Définir une **loi de probabilité** P sur un univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n\}$, c'est choisir une fonction P qui associe à chaque issue $\omega_i \in \Omega$ un nombre p_i de sorte que :

- Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:
$$0 \leq p_i \leq 1$$
- La somme des p_i vaut 1 :
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$
- La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des issues ω_i qui le composent.

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a ***équiprobabilité*** *ou que la loi de probabilité* P *est* ***équirépartie****.*

Remarques :

- Les deuxième et troisième points impliquent immédiatement que $P(\Omega) = 1$ et que pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$
- Concrètement, plus on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, plus la fréquence de réalisation d'une issue se rapproche d'un nombre correspondant à sa probabilité.
Ceci s'appelle **la loi des grands nombres**.

Exemple :

A l'oral

Si on ne lance une pièce de monnaie équilibrée que 10 fois, on pourrait s'attendre à obtenir à obtenir une fréquence d'apparition de Face d'environ $\frac{1}{2} = 0.5$, ie environ 5 fois Face. Mais il arrivera très souvent que l'on obtienne une fréquence très différente, telle que $\frac{4}{10} = \frac{2}{3} \simeq 0.33$.
Obtenir un nombre de Face différent de 5 change beaucoup la fréquence, puisqu'il n'y a que 10 lancés.

Alors que si on lance 1000 fois la pièce, on peut s'attendre à obtenir une fréquence d'apparition de Face d'environ $\frac{1}{2} = 0.5$, ie **environ** 500 fois Face, et cela arrivera très souvent.
Attention on n'obtient pas forcément exactement 500 fois Face, à cause de la fluctuation d'échantillonnage, mais environ 500 fois.
Relativement aux 1000 lancés effectués, la fréquence ne changera pas beaucoup, même si on obtient uniquement 450 fois Face.

Remarque : Il existe de nombreux types d'univers possibles. Pour vous cette année, l'univers sera toujours *fini*.
Mais l'an prochain, si tout va bien, vous serez amenés à travailler sur des univers du type :

- $\Omega = \mathbb{N}$ qui est *infini dénombrable* comme dans l'expérience « Choisir au hasard le numéro une décimale de π »
- $\Omega = \{\text{Nombres premiers}\}$ qui est *infini dénombrable* comme dans l'expérience « Choisir un nombre premier au hasard »
- $\Omega = [0;1]$ qui est *infini indénombrable* comme dans l'expérience « Choisir au hasard un réel entre 0 et 1 »

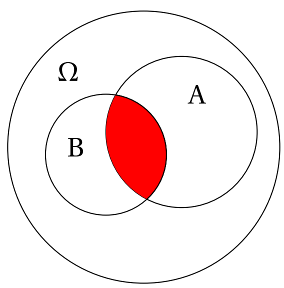
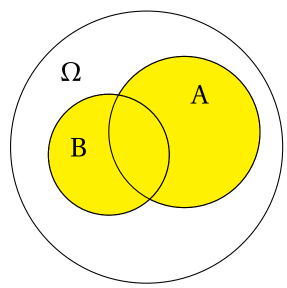
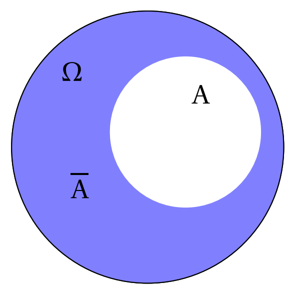
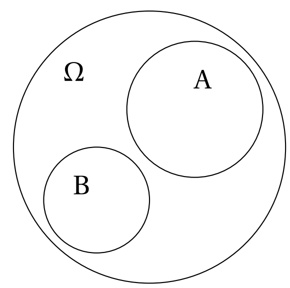
I.2. Ce que vous savez déjà

Objectifs : Utiliser les arbres de probabilité vu en seconde et travailler sur les ensembles.

Travail de l'élève 1 : On dispose de deux urnes. Dans la première notée U_1, il y a 5 boules Rouges et 3 boules Noires. Dans la seconde notée U_2, il y a 4 Rouges et 6 Noires.
On choisit au hasard une urne, puis on pioche une boule dedans. On s'intéresse à la couleur obtenue.

1. Modéliser l'expérience à l'aide d'un arbre.
2. On considère les événements suivants : U_1 : « Choisir l'urne U_1 » R : « Obtenir une boule Rouge »
   Définir en français les événements suivants, puis déterminer leur probabilité :

   a. $U_1 \cap R$ **b.** R **c.** $\overline{R}$ **d.** $U_1 \cup R$ **e.** $U_1 \cap \overline{U_1}$ **f.** $U_1 \cup \overline{U_1}$

$A \cap B$	$A \cup B$	$\overline{A}$	$A \cap B = \emptyset$
Intersection de A et B : Eléments communs de A et B	**Réunion de A et B :** Eléments de A ou B (voire les deux)	**Complémentaire de A :** Eléments de Ω non dans A	A **et** B **sont disjoints** : Aucun élément commun à A et B
			

Remarque : On a toujours

$$\emptyset \subset A \qquad A \cup \overline{A} = \Omega \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Proposition 1.

Pour tous événements A et B de Ω on a :

$$P(\emptyset) = 0 \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve

Montrons déjà le résultat intermédiaire suivant :

Lemme : Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités :

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

***Preuve du Lemme* :** Si l'un des événements A et B est l'ensemble vide, alors la relation précédente est évidente. Dans le cas contraire, par définition, $P(A)$ est la somme des probabilités des issues dans A, $P(B)$ est la somme des probabilités des issues dans B et $P(A \cup B)$ est la somme des probabilités des issues qui sont soit que dans A, soit que dans B, soit dans les deux.

Or A et B sont disjoints, par conséquent, $P(A \cup B)$ est la somme des probabilités des issues qui sont soit que dans A, soit que dans B. Ainsi $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Démontrons maintenant chacun des points de la proposition.

1.

$$1 = P(\Omega) = P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega) = P(\emptyset) + 1$$

D'où $P(\emptyset) = 0$.

2.

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

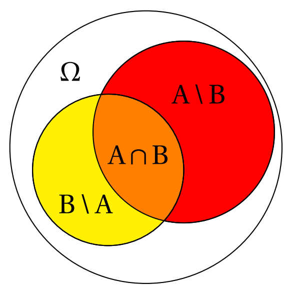
D'où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3. Tout repose sur ces découpages en événements disjoints deux à deux :

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$



Ainsi

$$\begin{aligned}
P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= P\Big((A \setminus B) \cup (A \cap B)\Big) + P\Big((B \setminus A) \cup (A \cap B)\Big) - P(A \cap B) \\
&= P\Big(A \setminus B\Big) + P\Big(A \cap B\Big) + P\Big(B \setminus A\Big) + P\Big(A \cap B\Big) - P(A \cap B) \\
&= P\Big(A \setminus B\Big) + P\Big(A \cap B\Big) + P\Big(B \setminus A\Big) \\
&= P\Big((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)\Big) \\
&= P(A \cup B)
\end{aligned}$$

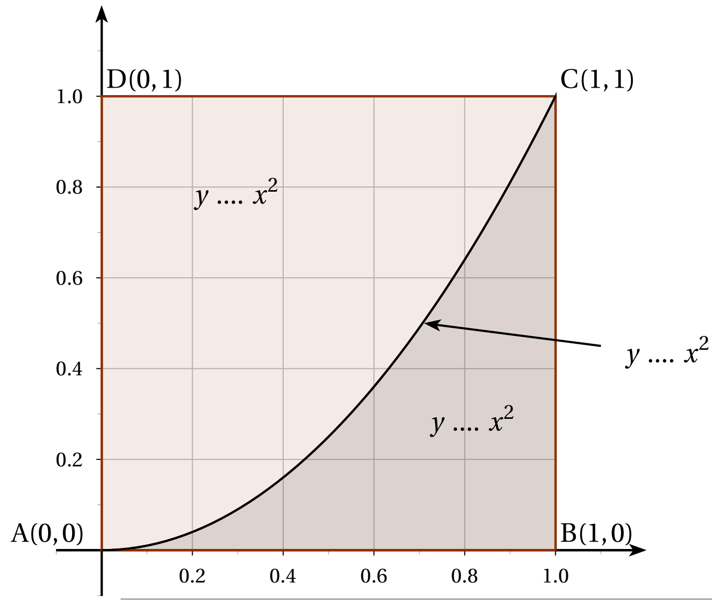
D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exercice 1 : **La loi des Grands Nombres**

Norbert, un élève syldave studieux, lance des fléchettes sur une cible carrée de côté 1. Il atteint toujours la cible (ie le carré de côté 1) mais comme il n'est pas très doué, il pense que sa probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

Il s'intéresse à la probabilité d'atteindre la zone sous la parabole $y = x^2$. Malheureusement, il ne sait pas encore calculer cette aire (il l'apprendra l'an prochain en Terminale S).

Il cherche donc à l'estimer par l'expérience, et pour cela, il a rédigé l'algorithme ci-dessous.



Algorithme 1 :

Variable(s) :
N est un entier naturel
X et Y sont des réels compris entre 0 et 1
Entrée(s) :
A prend la valeur 0
Début
  Saisir N
  Pour K allant de 1 à N **Faire**
    X prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
    Y prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
    Si ($Y > X^2$) **Alors**
      A prend la valeur A+1
    Sinon
      K prend la valeur K+1
    Fin Si
  Fin Pour
Fin
Sorties : Afficher $\dfrac{A}{N}$

1. Expliquer en quoi cet algorithme simule le lancer de fléchettes en détaillant ce que représentent X, Y, N, A et K.
2. Que représente l'affichage pour le problème de Norbert ?
3. En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, simuler 500 lancers et noter l'affichage en sortie.
4. Relancer votre programme plusieurs fois en notant les affichages successifs.
   Est-ce toujours les mêmes ? Pourquoi ?
5. Simuler 1 000 lancers et en déduire une valeur approchée de l'aire sous la parabole.

Remarque : Cette méthode s'appelle la méthode de Monte Carlo. On peut aussi l'utiliser pour trouver une valeur approchée de π.
Il suffit de considérer la courbe représentative de la fonction $y = \sqrt{1-x^2}$ sur $[0,1]$ qui dessine un quart de cercle dans un carré de côté 1. Cependant, il faut beaucoup de lancers pour obtenir une bonne approximation de π.

II) Variable aléatoire

II.1. Définition

Objectifs :

- ⇝ Introduire la notion de variable aléatoire,
- ⇝ Etablir la loi de probabilité d'une variable aléatoire,
- ⇝ Introduire la notion d'espérance et la critiquer.

Travail de l'élève 2 : L'éducation coûte trop cher. Afin de réaliser des économies, le gouvernement syldave a décidé de se passer à la fois de correcteurs et d'élèves. Tout est géré dans les bureaux du ministère, en simulant sur odinateur le lancé d'un dé pour chaque élève virtuel, le but étant d'obtenir une moyenne nationale satisfaisante à présenter aux investisseurs étrangers qui se rueront en Syldavie pour profiter d'une main d'œuvre aussi qualifiée.

1. **a.** Préciser l'univers Ω de cette expérience.

   b. Déterminer la probabilité p de l'événement A : « Obtenir un nombre impair »

2. On convient que lorsque le candidat virtuel jette un dé virtuel : s'il sort un 6, il a 20, s'il tombe sur un autre numéro pair il a 14, s'il tombe sur un numéro impair, il a 5.
   On désigne par X le procédé qui, selon la simulation, associe à chaque face la note d'un élève.

   a. Compléter $X(6) = \ldots$, $X(4) = \ldots$, $X(5) = \ldots$.
   Quel « objet mathématique » reconnaissez-vous dans X ?

   b. Quel est l'univers, noté $X(\Omega)$, de cette nouvelle expérience aléatoire ?

   c. On note $(X = 5)$ l'événement « L'élève obtient la note 5 »
   Quel lien existe-t-il entre A et $(X = 5)$? En déduire $P(X = 5)$.

   d. On note x_i les différentes valeurs prises par X.
   Compléter le tableau suivant :

x_i	5			Total
$P(X = x_i)$				

   Doit-on s'étonner du résultat de la case Total ?

3. **a.** Quelle moyenne nationale peut espérer obtenir le ministre ?

   b. Cette moyenne nationale est-elle une moyenne ?

   c. Cette moyenne nationale sera-t-elle effectivement atteinte ?

Définition 2.

On appelle **variable aléatoire** toute fonction d'un univers Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée en général X.
Autrement dit, définir une variable aléatoire sur un univers c'est associer à chaque issue un réel, appelé de manière générale « gain », pouvant être positif, négatif ou nul.

Définition 3. (et Proposition *Admise*)

Avec les notations précédentes, si $x_1, x_2, \ldots, x_m$ désignent les valeurs prises par X, on note $(X = x_i)$ l'événement « la variable aléatoire X prend la valeur x_i ».
La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X est la fonction de $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dans $[0; 1]$, qui à chaque gain x_i associe le nombre $P(X = x_i)$.

Remarques :

- Il s'agit bien d'une loi de probabilité sur $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Toutes les propriétés rappelées dans le I) sont donc encore vraies.
- On représente en général cette loi à l'aide d'un tableau du type :

Valeurs x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_m	Total
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_m	1

On utilisera désormais toutes ces notations.

Exemple :

Les derniers syldaves fonctionnaires touchant un salaire pour leur travail coûtent encore trop cher à l'état. Un nouveau système de rémunération en neurones a été mis au point :
Le fonctionnaire doit chaque mois verser un impôt de $1\,000$ neurones à l'état puis il lance un dé. S'il sort un 6, il touche $3\,000$ neurones. Dans les autres cas, l'état ne lui verse rien.
On appelle X la variable aléatoire sur $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ qui, à chaque issue associe le gain (positif ou négatif) en neurones d'un fonctionnaire. On a :

$$X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = X(5) = -1000 \qquad \text{et} \qquad X(6) = 2000$$

La loi de probabilité du gain X est résumée dans le tableau suivant :

gain x_i	-1000	2000	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Exercice 2 : Dans le club de Norbert, plusieurs activités sont proposées dont le tir à l'arc et le golf. La cotisation de base pour adhérer au club est de 30€ auxquels s'ajoutent éventuellement :

- 50€ pour pratiquer le tir à l'arc
- 80€ pour pratiquer le golf.

Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 les deux sports. On choisit un adhérent au hasard et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque adhérent sa cotisation.

1. Quelles sont les différentes valeurs prises par X et dans quels cas ?
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. En déduire la probabilité qu'un adhérent pratique au moins l'un des deux sports.

Exercice 3 : Ce tableau présente la loi de probabilité P associée à une variable aléatoire X.

X	-2	0	3	5	10
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{14}$	a	$\frac{1}{7}$	b	$\frac{1}{14}$

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer a et b sachant que les événements $X = a$ et $X = b$ sont équiprobables.
3. Calculer $P(X \leq 4)$.
4. Imaginer un jeu dont les probabilités de gain seraient données par le tableau ci-dessus.

Exercice 4 : Fabrice, le petit frère de Norbert, veut faire une blague à Norbert. Il lui a acheté 4 bonbons sans lui dire les parfums. Il y en a 1 à la menthe (M), 1 à la fraise (P), et 2 au kumiss (K).
Le Kumiss est une boisson Kirghize, à base de lait de jument fermentée.
Norbert les a mis dans son sac et compte chaque jour, en mangé un, pioché au hasard, cependant :

- ⇝ S'il tombe sur un bonbon au kumiss dès le premier jour, il n'en mange pas d'autres, pensant qu'ils sont tous au même parfum
- ⇝ Sinon, il continue d'en manger tant qu'il n'a pas mangé le deuxième bonbon au kumiss.

Fabrice s'intéresse évidemment à l'ordre dans lequels seront mangés les bonbons.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre.
2. Combien y a-t-il d'issues ?
3. Quelle est la probabilité que Fabrice mange un bonbon au kumiss le premier jour ?
4. Fabrice se demande si Norbert mangera les deux bonbons au kumiss ou non. Il appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de bonbons au kumiss mangés par Norbert. Donner la loi de probabilité de X.
5. Fabrice s'intéresse aussi évidemment au jour où Norbert mangera son premier bonbon au kumiss. On appelle Y la variable aléatoire qui donne ce jour.
   Donner la loi de probabilité de Y.

Exercice 5 : On tire avec remise deux cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'as obtenus. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 6 : La finale d'un master de tennis oppose Roger et Raphaël. Le premier qui gagne deux sets remporte le prix. On considère que Roger a deux fois plus de change de gagner un set.

1. Quelle est la probabilité p que Roger gagne un set ?
2. Donner une représentation de la situation.
3. On définit par X la variable aléatoire donnant le nombre de sets disputées pour déterminer le vainqueur du master.
   Donner la loi de X.

II.2. Espérance

Objectifs :

- ⇝ Manipuler Algobox
- ⇝ Donner du sens à la notion d'espérance,
- ⇝ Observer la loi des grands nombres.

Travail de l'élève 3 : On reprend le contexte de l'activité précédente et on donne l'algorithme suivant :

Algorithme 2 :

Variables
Dé, i, N sont des nombres entiers
Effectif est une liste à deux éléments
Début
Saisir N
Effectif[1] et Effectif[2] prennent la valeur 0
Pour i allant de 1 à N **Faire**
Affecter à Dé un entier aléatoire entre 1 et 6
Si (Dé == 6) **Alors**
Affecter à Effectif[1] la valeur Effectif[1]+1
Sinon
Affecter à Effectif[2] la valeur Effectif[2]+1
Fin Si
Fin Pour
Afficher Effectif[1]
Fin

1. Programmer cet algorithme sur Algobox et le tester.
2. Que fait-il ?
   On précisera ce que représente chacune des variables
3. Modifer ce programme pour qu'il simule l'attribution des notes en Syldavie et qu'il renvoit les effectifs de chaque note. Le tester.
4. Modifier votre dernier programme pour qu'il renvoit la moyenne nationale obtenue.
5. Effectuer un simulation pour 10 élèves, puis 100 puis 1 000.
   Que constatez-vous ?

Définition 4.

L'espérance mathématique de X est le nombre E(X) définie par :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{m} x_i \times p(\mathrm{X} = x_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i p i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_m x_m$$

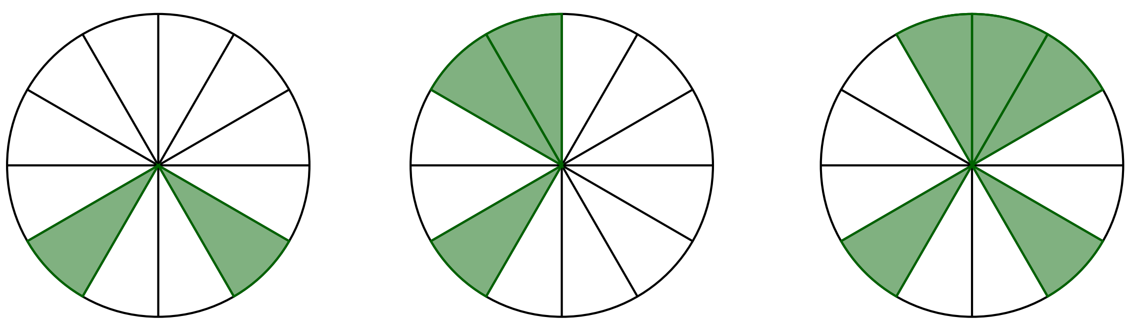
Remarques :

- ⇝ Lors d'un grand nombre d'expériences, le gain moyen d'un joueur se stabilise aux environs de $E(X)$.
- ⇝ On interprète l'espérance comme le gain moyen que peut espérer un joueur par partie, s'il joue un grand nombre de fois. On parlera donc de jeu favorable, défavorable ou équitable en fonction du signe de $E(X)$.

Exemples :

1. Dans l'exemple précédent du salaire des fonctionnaires en Syldavie, calculer $E(X)$.
2. Les entreprises privées décident de payer leurs salariés selon le même modèle, mais elles proposent 6000 neuronnes à la place de 3000 (avec la même mise initiale).
   Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_S correspondante et calculer $E(X_S)$.
3. Les banques se calquent aussi sur ce modèle mais elles utilisent un dé à 100 faces, une mise initiale de 1 million de neurones et un gain éventuel de 1 milliard de neurones.
   Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_A correspondante et calculer $E(X_A)$.
4. Interpréter et critiquer l'ensemble de vos résultats.

Exercice 7 : Norbert propose un jeu à son frère Fabrice. Il dispose de trois roues comportant 12 secteurs angulaires de même aire chacune.



Mise : 2 crêpes
Gain : 8 crêpes

Mise : 1 crêpe
Gain : 4 crêpes

Mise : 1 crêpe
Gain : 2 crêpes

Norbert propose à Fabrice de choisir une roue, et lui dit qu'il gagne lorsque la roue s'arrête sur le vert.
Quelle roue doit choisir Fabrice (sachant qu'il est très gourmand) ?

Exercice 8 : Pendant ses vacances d'été, Norbert aide sa mère à entraîner 30 yaks au saut d'obstacles dans la boue.
Un yak n'est admis en compétition nationale que s'il est capable d'exécuter le parcours en moins de 5 minutes.
Un tiers des yaks sont entraînés par Norbert, 20% par son frère Fabrice et le reste par leur mère Laurence.
Laurence amène les $5/7^e$ des ses yaks à la compétition, Norbert réussit pour 50% de ses yaks, tandis que Fabrice y parvient pour 40%.
On choisit un yak au hasard et on s'intéresse aux événements suivants :

- ⇝ L : « Le yak est entraîné par Laurence »
- ⇝ F : « Le yak est entraîné par Fabrice »
- ⇝ N : « Le yak est entraîné par Norbert »
- ⇝ C : « Le yak est capable de participer à la compétition nationale »

1. Donner une représentation de la situation
2. Calculer $p(L)$
3. Déterminer $p(\overline{L} \cap C)$ et $p(\overline{L} \cap \overline{C})$

4. Un yak qui est capable de participer à la compétition est vendu ensuite $5000€$ sur le marché européen, tandis que les autres sont cédés à $3000€$.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le prix d'un yak de cette famille sur le marché européen.
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance de X. Interpréter.

II.3. Variance et écart-type

Objectifs :

- Réinvestir ce que les élèves viennent d'apprendre sur les variables aléatoires.
- Parler d'étendue, écart interquartile, écart à la moyenne (sans valeur absolue, avec) ... suivant leurs idées (recherche en groupe)
- Introduire le sens de la variance et de l'écart-type.

Travail de l'élève 4 : On reprend l'activité sur les notes d'élèves de Syldavie.
Pour rentrer à l'université de Springfield, ils sont mis en compétition avec les élèves de Groland.
Cette université privilégie les élèves du pays au meilleur résultat moyen espéré et à leur régularité.
A Groland, on a également décidé de tirer les résultats du baccalauréat aux dés. Voici la règle : Lorsqu'on obtient 6 au dé, l'élève a 20. Un autre nombre pair fournit un 7 à l'élève. Ensuite s'il sort 1, l'élève a 5, s'il sort 3, l'élève a 10 et enfin, s'il sort 5, l'élève a 14.

1. Calculer la moyenne nationale que peut espérer obtenir Groland.
2. De quels moyens dispose-t-on pour comparer la régularité de chacun des pays ?

Question subsidiaire pour donner de suite une formule praticable : Montrer que

$$\sum_{i=1}^{m} \left(x_1 - \mathrm{E(X)}\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 pi - \left(\mathrm{E(X)}\right)^2$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \left(x_1 - \mathrm{E(X)}\right)^2 p_i &= \sum_{i=1}^{m} \left(x_i^2 - 2x_i\mathrm{E(X)} + (\mathrm{E(X)})^2\right) p_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i - 2\mathrm{E(X)} \sum_{i=1}^{m} x_i p_i + \left(\mathrm{E(X)}\right)^2 \sum_{i=1}^{m} p_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i - 2\mathrm{E(X)}\mathrm{E(X)} + \left(\mathrm{E(X)}\right)^2 \times 1 \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i - \left(\mathrm{E(X)}\right)^2
\end{aligned}$$

Définition 5.

La variance de X est le nombre $V(X)$ obtenu par la calcul suivant :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 pi - \left(E(X)\right)^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p3 + ... + x_m^2 p_m - \left(E(X)\right)^2$$

L'écart-type de X est le nombre $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarques :

- En réalité, la variance est définie par la formule

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(X)]^2 pi = [x_1 - E(X)]^2 p_1 + \cdots + [x_m - E(X)]^2 p_m$$

  Il est alors clair que la variance est toujours positive.
  Les carrés sont là pour ne pas avoir de problèmes de signes et rappellent la distance euclidienne, bien connue.
  La variance est en ce sens homogène au carré d'une distance. L'écart-type définit donc une distance proprement dite.
- La variance permet de quantifier la régularité d'une variable aléatoire mais on interprète plutôt l'écart-type à cause du problème d'unité.
  L'écart-type est une caractéristique de la dispersion des valeurs de X autour de $E(X)$, autrement dit, cela représente le risque du jeu.

Exemple :

Dans l'exemple précédent sur les différents salaires en Syldavie,

1. Calculer la variance et l'écart-type de X.
2. Interpréter vos résultats.
3. Vérifier vos résultats grâce aux indicateurs statistiques de votre calculatrice, en suivant l'une des procédures suivantes, puis calculer la variance et l'écart type des variables X_S et X_A.

TI82, 83 et 84

Entrer les valeurs prises par la variable aléatoire et leurs probabilités :

- Taper $\boxed{\text{stats}}$ et valider le choix de `EDIT` et `1:Edite` par $\boxed{\text{enter}}$
- Entrer les valeurs prises par la variable aléatoire dans la liste L1, et les probabilités dans la liste L2.
  On se déplace dans le tableau grâce aux flèches.

Afficher les indicateurs des listes :

- Par $\boxed{\text{stats}}$, choisir `CALC` et `1:Stats 1-Var` en validant par $\boxed{\text{enter}}$
- `Stats 1-Var` apparait à l'écran.
  Préciser les listes concernées en saisissant à la suite L_1, L_2 grâce aux touches $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{2}$
- Valider par $\boxed{\text{enter}}$ pour obtenir les indicateurs.
  La flèche $\boxed{\blacktriangledown}$ permet d'afficher la suite des indicateurs.

Effacer les listes :

- Par $\boxed{\text{stats}}$ $\boxed{4}$, choisir `4:EffListe`
- `EffListe` apparaît à l'écran.
  Préciser les listes concernées en saisissant à la suite leur nom, séparés d'une virgule.
- Valider par $\boxed{\text{enter}}$

TI89

Entrer les valeurs prises par la variable aléatoire et leurs probabilités :

- Pour accéder au menu de statistiques, appuyer sur la touche $\boxed{\text{APPS}}$
- Sélectionner `6:Data/Matrix Editor` puis `3:New`
- Donner un nom à la variable (par exemple *salaires*) qui désigne le dossier où seront enregistrer les listes.
- Entrer les valeurs prises par la variable aléatoire dans la liste c1, et les probabilités dans la liste c2.
  On se déplace dans le tableau grâce aux flèches.

Afficher les indicateurs des listes :

- Taper $\boxed{\text{F5}}$, et vérifier que vous avez :
  - `Calculation Type : OneVar`
  - `Freq and Categories : YES`
  - `Freq : c2`
- Valider par $\boxed{\text{enter}}$
  La flèche $\boxed{\blacktriangledown}$ permet d'afficher la suite des indicateurs.

Effacer les listes :

- Dans l'éditeur de matrice courant, choisir `1:Current`
- Choisir `F1` puis `8: Clear Editor`.

Casio 35+, 65 et 85

Entrer les valeurs prises par la variable aléatoire et leurs probabilités :

- Par Menu, choisir le menu `STAT` et valider par EXE
- Entrer les valeurs prises par la variable aléatoire dans la liste List 1, et les probabilités dans la liste List 2.
  On se déplace dans le tableau grâce aux flèches.

Afficher les indicateurs des listes :

- Sur le même écran, choisir `CALC` par la touche F2 située en dessous.
- Choisir `SET` par F6 pour définir les listes concernées.
  Vérifier que vous avez :
  - `XList : List1`
  - `Freq : List2`
- Valider par EXE.
- Choisir `1 VAR` par F1 pour obtenir les indicateurs.
  La flèche ▼ permet d'afficher la suite des indicateurs.

Effacer les listes :

- Dans le menu `STAT`, sélectionner un élément de la liste à effacer.
- Puis choisir `DEL-A` par les touches ▷ F4
- Valider par EXE

TI Nspire CX CAS

Entrer les valeurs prises par la variable aléatoire et leurs probabilités :

- Choisir `Ajouter Tableur & Listes`
- Entrer les valeurs prises par la variable aléatoire dans la colonne A, et les probabilités dans la colonne B.
  On se déplace dans le tableau grâce aux flèches.

Afficher les indicateurs des listes :

- Appuyer sur menu + 4 : Statistiques + 1 : Calcul statistique + 1 : Statistiques à une variable
- Remplir `Nbre de listes :` **1**. Puis :
  - `Liste des X1 :` **a[]**
  - `Liste des fréquences :` **b[]**
  - Laisser le reste tel quel.
- Valider par enter.
  La flèche ▼ permet d'afficher la suite des indicateurs.

Effacer la table (une page) :

- Appuyer sur ctrl + ▲
  Les pages du classeur s'affichent toutes en petit.
- Sélectionner celle de votre choix grâce aux flèches et appuyer sur del

Dans les quatre cas, la calculatrice affiche dans l'ordre :

- $\overline{x}$: la moyenne pondérée
- $\sum x$: la somme pondérée des valeurs, ie $\sum x_i p_i$ (ici c'est la même chose que $\overline{x}$)
- $\sum x^2$: la somme pondérée des carrés des valeurs, ie $\sum x_i^2 p_i$ (utile pour le calcul de la variance)
- $\mathrm{S}x$: sans valeur quand les coefficients sont des probabilités)
- σx : l'écart-type
- n : l'effectif, ie $\sum p_i$ (donc ici $n = 1$)
- minX : la plus petite valeur prise par X
- Q_1 : le premier quartile
- Med : la médiane
- Q_3 : le troisième quartile
- maxX : la plus grande valeur de X

Exercice 9 : On définit les deux variables aléatoires X et Y par leurs lois de probabilités ci-dessous :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	0,25	0,35	0,2	0,1	0,1

y_i	-3	-2	0	2	3
$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = y_i)$	0,15	0,3	0,25	0,15	0,15

1. En utilisant la calculatrice, déterminer l'espérance et l'écart-type de X, puis de Y.
2. On définit la variable aléatoire $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$.
   - **a.** Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   - **b.** Donner sa loi de probabilité (on pourra s'aider d'un arbre).
   - **c.** Calculer son espérance. Que constatez-vous ?
   - **d.** Le même constat peut-il être fait sur la variance de Z ?

Exercice 10 : Norbert lance n dés ($n \geq 1$). Le jeu consiste à miser 2€, puis si on obtient au moins un 6, on remporte 3€.

1. On note A l'événement « obtenir au moins un 6 »
   - **a.** Décrire $\overline{\mathrm{A}}$ en français puis exprimer en fonction de n la probabilité $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$.
   - **b.** En déduire que $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ en fonction de n.
   - **c.** Compléter le tableau suivant :

Nombres de dés n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(\mathrm{A})$								

   - **d.** Combien de dés faut-il pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\dfrac{2}{3}$?
2. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.
   - **a.** Donner la loi de probabilité de X en fonction de n.
   - **b.** Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ en fonction de n.
     Combien de dés faut-il pour que le jeu soit favorable au joueur ? Est-on surpris ?
   - **c.** Calculer $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ puis $\sigma(\mathrm{X})$ dans ce cas. Interpréter.

Exercice 11 : Norbert veut davantage d'argent de poche. Il propose à sa mère de lancer une pièce équilibrée trois fois de suite.
Les règles du jeu sont ensuite expliquées par l'algorithme suivant.

Algorithme 3 :

Variables
 a, b et c sont trois entiers naturels.

Début
 Affecter à a un entier aléatoire compris entre 0 et 1
 Affecter à b un entier aléatoire compris entre 0 et 1
 Si $(a \neq b)$ **Alors**
  Afficher le message « Perte de 20 € »
 Sinon
  Affecter à c un entier aléatoire compris entre 0 et 1
  Si $(a \neq c)$ **Alors**
   Afficher le message « Perte de 20 € »
  Sinon
   Afficher le message « Gain de 30 € »
  Fin Si
 Fin Si
Fin

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Laurence.

1. Expliquer simplement les règles du jeu proposé par Norbert.
2. Donner la loi de probabilité de X.
   On pourra s'aider d'un arbre
3. Calculer l'espérance mathématique de cette loi.
   Le jeu est-il équitable ? Expliquer en interprétant.
4. Calculer l'écart-type de cette loi. Le jeu est-il risqué ?
5. Laurence refuse de jouer ainsi, mais elle accepterait si le jeu était équitable.
   Combien Norbert doit-il lui proposer de perdre pour cela (sans changer le gain) ?
6. Dans ces conditions, le jeu est-il risqué ?

Exercice 12 : Dans chacun des cas suivants, dire s'il existe des liens logiques entre les affirmations A et B.

1. A : « La variable aléatoire X prend ses valeurs parmi 2, 3 et 5 » B : « $E(X) \geq 2$ »
2. A : « La variable aléatoire X peut prendre des valeurs positives » B : « $E(X) \geq 0$ »
3. A : « $V(X) \geq 0$ » B : « $E(X) \geq 0$ »
4. A : « $V(X) \geq 1$ » B : « $\sigma(X) \geq 1$ »

Exercice(s) du livre : **Repère** : 68 p 204 (arbres)

Problème : DM 1 : Série Noire

On dispose d'une urne contenant 10 boules blanches et des boules noires.
Une expérience consiste à piocher au hasard une boule dans l'urne, noter sa couleur, la remettre dans l'urne et piocher une seconde boule.
On associe à cette expérience la variable aléatoire X donnant le nombre de boules blanches obtenues.

1. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{25}{64}$	1

   Combien y-a-t-il de boules noires dans l'urne ?

2. On se place dans le cas précédent et on considère le jeu suivant : pour une certaine mise, un joueur remporte 1€ par boule blanche piochée.
   Quel doit être le montant de la mise pour que le jeu soit équitable ?
3. Calculer l'écart-type dans le cas d'un jeu équitable. Que mesure ce nombre ?

II.4. Linéarité

Travail de l'élève 5 : A Groland, le système de rémunération des fonctionnaires est le même que celui de Syldavie, mais la monnaie est le moustique, dont le taux est de 4 moustiques pour 1 neurone. De plus, un salarié doit verser un impôt supplémentaire de 1000 moustiques au départ.

1. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y donnant le gain d'un fonctionnaire en moustiques.
2. Exprimer la variable aléatoire Y en fonction de la variable X de l'exemple précédent.
3. Quelle est la loi de probabilité de Y ?
4. Sans calculer $E(Y)$, démontrer que $E(Y) = 4E(X) - 1000$. En déduire $E(Y)$
5. Sans calculer $E(Y)$, démontrer que $V(Y) = 16E(X)$, sans calculer $V(Y)$. En déduire $V(Y)$.

Propriété 1.

Soient a et b deux réels.
L'espérance est linéaire : $E(aX + b) = aE(X) + b$
On en déduit la formule : $V(aX + b) = a^2V(X)$

Preuve

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b)=\sum_{i=1}^{m}\left(ax_i+b\right)p_i &= \sum_{i=1}^{m}\left(ax_ip_i+bp_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{m}ax_ip_i+\sum_{i=1}^{m}bp_i\\
&= a\sum_{i=1}^{m}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{m}p_i\\
&= a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) &= \sum_{i=1}^{m}\left(ax_i+b\right)^2pi-\left(\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b)\right)^2\\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(a^2x_i^2+2abx_i+b^2\right)pi-\left(a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b\right)^2\\
&= \sum_{i=1}^{m}a^2x_i^2p_i+2ab\sum_{i=1}^{m}x_ip_i+b^2\sum_{i=1}^{m}pi-\left(a^2\mathrm{E}^2(\mathrm{X})+2ab\mathrm{E}(\mathrm{X})+b^2\right)\\
&= a^2\sum_{i=1}^{m}x_i^2p_i+2ab\mathrm{E}(\mathrm{X})+b^2-a^2\mathrm{E}^2(\mathrm{X})-2ab\mathrm{E}(\mathrm{X})-b^2\\
&= a^2\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2p_i-\mathrm{E}^2(\mathrm{X})\right)\\
&= a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

Exemple :

A Groland, le système de rémunération des salariés et des actionnaires est le même qu'en Syldavie, mais en moustiques. De plus, le premier ne demande pas de mise initial, et le second donne systématiquement une prime de 500000 moustiques.

1. Exprimer les variables aléatoires $\mathrm{Y_S}$ et $\mathrm{Y_A}$ donnant respectivement le salaire des salariés et des actionnaires à Groland.
2. En déduire $\mathrm{E}(\mathrm{Y_S})$, $\sigma(\mathrm{Y_S})$, $\mathrm{E}(\mathrm{Y_A})$ et $\sigma(\mathrm{Y_A})$.
3. Interpréter.

Exercice 13 : Une urne contient $n+5$ boules : 5 blanches et n noires ($n \geq 3$). Tous les tirages sont supposés équiprobables.
Norbert tire des boules de l'urne. Pour chaque boule noire tirée, il perd 1 € et pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 €.

1. Dans cette question, Norbert tire deux boules, successivement et avec remise.
   On définit par X la variable aléatoire égale à son gain.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer en fonction de n l'espérance mathématique du gain de Norbert.
      Y a-t-il une valeur de n pour laquelle le jeu est équitable ? Si oui, laquelle ?
2. Dans cette question, Norbert tire deux boules, successivement et sans remise.
   On définit par Y la variable aléatoire égale à son gain.
   a. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de Y.

c. Calculer en fonction de n l'espérance mathématique du gain de Norbert.
Y a-t-il une valeur de n pour laquelle le jeu est équitable ? Si oui, laquelle ?

d. Fabrice déclare qu'elle ne joue que si $n \leq 10$. Expliquer pourquoi.

3. Dans cette question, pour pouvoir jouer, on doit donner 2 €.

a. Dans les deux cas précédents, quelle est la nouvelle espérance ?

b. Fabrice ne souhaite pas jouer. Pourquoi ?

Exercice 14 : Dans chacun des cas suivants, dire si les affirmations A et B sont équivalentes A et B.

1. A : « $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \leq -2$ » B : « $\mathrm{E}(-2\mathrm{X}) \geq 0$ »
2. A : « $\mathrm{E}(\mathrm{X}) > -4$ » B : « $\mathrm{E}(2\mathrm{X}+8) > 0$ »
3. A : « $\mathrm{V}(3\mathrm{X}+4) \geq 4$ » B : « $\sigma(\mathrm{X}) \geq 4$ »
4. A : « $\mathrm{V}(\mathrm{X}-11) \leq 4$ » B : « $\sigma(\mathrm{X}) \geq 4$ »

Problème : AP : Prenez des initiatives par groupe de trois

Norbert a construit un appareil de jeu contenant quatre boules blanches (B_1, B_2, B_3 et B_4) et trois boules rouges (R_1, R_2 et R_3).
Lorsque l'on introduit un jeton dans l'appareil, trois boules tombent dans un panier. Toutes les boules ont la même probabilité de tomber dans le panier.
Si les trois boules obtenues sont rouges, son frère Fabrice (le joueur) gagne un faux billet de 100 €.
Si seulement deux des boules obtenues sont rouges, Fabrice gagne gagne un faux billet de 15 €.
Si une seule des boules obtenues est rouge, Fabrice gagne gagne un faux billet de 5 €.
Si les trois boules sont blanches, Fabrice ne gagne rien.

Le prix d'un jeton est fixée à 10 € (en faux billet toujours). Après quelques parties, Norbert trouve que son jeu ne s'avère pas suffisamment rentable pour lui, il envisage deux solutions : augmenter de 1 € le prix du jeton ou ajouter une boule blanche dans son appareil.
Quelle est la solution la plus rentable pour lui ?

III) Algorithmes de loi géométrique tronquée

Exemple :

Le « président » de Syldavie pense que les filles de son pays sont trop intelligentes et risquent de renverser son pouvoir, pourtant bien établi depuis 30 ans.
Pour limiter le nombre de filles en Syldavie il décide que chaque famille aura au moins un enfant et arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon, dans un maximum de 4 enfants par famille.
On considère que chaque enfant autant de chances d'être un garçon qu'une fille, indépendamment du sexe d'éventuel(s) enfant(s) précédent(s).
On se demande si ce choix a la conséquence attendue, à savoir de diminuer le nombre de filles dans la population.

1. On présente l'algorithme suivant :

Algorithme 4 :

Variables
X, NbeEnfants, NbeFilles sont des nombres entiers

Début
$n = 0$, $X = 0$
Tant que (X == 0 et NbeEnfants< 4) **Faire**
  Affecter à X un entier aléatoire entre 0 et 1
  $n = n + 1$
Fin Tant que
Si (X == 1) **Alors**
  NbeFilles= $n - 1$
  Afficher « La famille a eu », NbeFilles , « fille(s) et 1 garçon »
Sinon
  La famille a eu 4 filles et 0 garçon
Fin Si

Fin

a. Que fait-il ?

b. Modifier cet algorithme pour qu'il simule les naissances dans N familles quelconque en Syldavie et qu'il renvoit le nombre de garçons et le nombre de filles.

c. Programmer votre algorithme sur Scilab.

d. Conjecturer une réponse au problème posé.

2. Le « président » de Syldavie appelle S (pour Succès) et E (pour Echec) les événements suivants :
S : « La famille a un garçon » et E : « La famille n'a pas de garçon »

a. Schématiser la situation par un arbre.

b. On appelle X la variable aléatoire égale à k si le premier Succès est rencontré au $k^{ième}$ enfant, et à 0 si aucun Succès n'a été obtenu.
Déterminer la loi de X.

c. Répondre au problème posé.

Exemple :

Le jeu du lièvre et de la tortue

Le jeu consiste à affronter un lièvre et une tortue pour parcourir un plateau de 6 cases, selon les règles suivantes :

- On lance un dé équilibré à 6 faces,
- Si le 6 sort, le lièvre avance directement de 6 cases (et donc gagne) ;
- Sinon, la tortue avance d'une case.
- Le jeu continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

On appelle p la probabilité de gagner du lièvre.

1. Conjectures :
   a. Conjecturer la situation la plus enviable, celle du lièvre ou de la tortue ?
   b. Conjecturer la valeur de p.
2. Simulation :
   a. Simuler ce jeu sur Algobox, avec en affichage la fréquence de gain du lièvre.
   On commencera par demander à l'utilisateur le nombre de parties qu'il souhaite faire.
   b. Les résultats de la simulation pour 50 expériences vous semblent-ils en accord avec votre conjecture ? Pour 100 ? $10\,000$?
3. Modélisation :
   a. Schématiser la situation à l'aide d'un arbre.
   b. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers de dés qu'il a fallu au lièvre pour gagner et égale à 0 si le lièvre a perdu.
   Déterminer $P(X=0)$ puis l'expression de $P(X=k)$ en fonction de k, pour $1 \leq k \leq 6$.
   c. En déduire p.
   d. Calculer $E(X)$. Interpréter.

Exemple : Le paradoxe de Saint Pétersbourg

Un joueur joue contre la banque au jeu de « pile ou face », en misant toujours sur face. Il adopte la stratégie suivante : il mise un euro au premier coup, et s'il perd, double la mise au coup suivant, tant que face ne sort pas. S'il gagne, il récupère sa mise augmentée d'une somme équivalente à cette mise. Le joueur dispose d'une fortune limitée, qui lui permet de perdre au maximum n coups consécutifs et, si pile sort n fois de suite, le joueur ne peut plus miser et arrête le jeu. La fortune de la banque, elle, n'est pas limitée. Une partie consiste pour le joueur à jouer, si sa fortune le lui permet, jusqu'à ce que face sorte. Il s'agit de déterminer la probabilité qu'a le joueur de gagner une partie, son gain algébrique moyen par partie, et d'analyser l'intérêt pour le joueur de jouer à ce jeu, par rapport à la banque.

1. Déterminer la mise du joueur s'il gagne au $3^{ième}$ coup, puis au $10^{ième}$, puis au $k^{ième}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.
2. On envisage le cas où le joueur dispose d'une fortune de $1\,000$€.
   a. Sa fortune lui permet de tenir n. Déterminer n grâce à un tableau de valeurs.
   b. Simulation
      i. Sur tableur, reproduire la feuille de calculs ci-après, qui simule $1\,000$ parties en 9 coups.
      On a codé la sortie de Face par 1 et celle de Pile par 0 et on à utiliser notamment les formules suivantes :
      - `=ALEA.ENTRE.BORNES(0,1)`
      - `=SI(OU(A2=1;A2="");"";ALEA.ENTRE.BORNES(0,1))`
      - `=SI(SOMME(A2:I2)=0;"Tortue";"Lièvre")`
      - `=NB.SI(K2:K1001;"Tortue")`

⇝ `=NB.SI(A2:I2;0)+NB.SI(A2:I2;1)`

ii. Puis tracer l'histoire correspondant à la plage $L6:M14$. Cela vous parait-il cohérent ?

iii. Discuter l'intérêt de ce jeu.

c. Modélisation : on appelle X la variable aléatoire qui comptabilise le rang de la première face, et l'on convient que ce rang est égal à 0 si face ne sort pas et on appelle Y la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

i. Déterminer $P(X=0)$ puis l'expression de $P(X=k)$ en fonction de k, pour $1 \leq k \leq n$.

ii. Déterminer les valeurs possibles de Y

iii. Déterminer la loi de Y.

iv. Calculer $E(Y)$.

v. Conclure en terme de gain moyen et de risque.

d. Désormais on considère que la banque joue n et on reprend les notations précédentes.

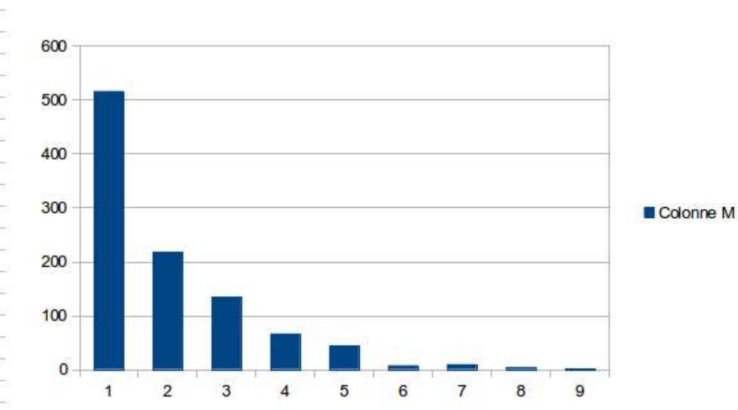
i. Calculer $P(X=0)$ et en déduire la probabilité de gagner pour la banque.

ii. De quoi se rapproche celle valeur quand n est très grand ?

iii. Conclure.

B2 | $f(x)$ Σ = | =SI(OU(A2=1;A2="");"";ALEA.ENTRE.BORNES(0;1))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Lancé 1	Lancé 2	Lancé 3	Lancé 4	Lancé 5	Lancé 6	Lancé 7	Lancé 8	Lancé 9	Nbe Lancers	Vainqueur	Nombre de parties perdues	
2	1									1	Lièvre		2
3	0	1								2	Lièvre		
4	0	1								2	Lièvre		
5	1									1	Lièvre	Nombre de parties gagnées en :	
6	1									1	Lièvre	1	516
7	0	0	1							3	Lièvre	2	218
8	0	1								2	Lièvre	3	134
9	0	0	1							3	Lièvre	4	66
10	0	1								2	Lièvre	5	43
11	0	0	1							3	Lièvre	6	7
12	0	0	1							3	Lièvre	7	9
13	0	1								2	Lièvre	8	4
14	1									1	Lièvre	9	1
15	1									1	Lièvre	Somme :	998
16	0	1								2	Lièvre		
17	0	1								2	Lièvre		
18	1									1	Lièvre		
19	1									1	Lièvre		
20	1												
21	0	0	0	0	1								
22	1												
23	1												
24	1												
25	0	1											
26	1												
27	0	0	0	1									
28	1												
29	0	0	0	0	0								
30	1												
31	1												
32	0	1											
33	0	0	1										
34	1												
35	1												
36	0	0	1										
37	1												
38	1												
39	0	0	0	0	1								
40	1									1	Lièvre		
41	1									1	Lièvre		



La notion de risque, liée à celle de la dispersion de la variable aléatoire « gain », est un élément décisif d'appréciation d'un jeu. Le paradoxe de Saint-Pétersbourg est l'un des problèmes ayant donné naissance à la théorie de la décision en économie. Dans cette théorie, on formalise en particulier la notion de fonction d'utilité, qui mesure le degré de satisfaction d'un consommateur.

<u>Exercice 15</u> : (Challenge)

Combien y a-t-il de « couples » de délégués possibles dans de votre classe ?