Chapitre 11

Produit Scalaire

Hors Sujet

Titre : « Death Note »
Auteur : Oba et Obata
Présentation succinte : *Death Note* est un manga de type shônen, créé par le scénariste Tsugumi Oba et le dessinateur Takeshi Obata. Il a été prépublié dans un journal de 2003 à 2006, et par la suite publiée en douze tankôbon de 2004 à 2006.

L'histoire est centrée sur *Raito Yagami*, un lycéen surdoué qui juge le monde actuel criminel et corrompu. Sa vie change du tout au tout le jour où il ramasse par hasard un mystérieux cahier intitulé « Death Note ». Ancienne propriété d'un dieu de la mort, le Death Note permet à son utilisateur de tuer toute personne dont il connaît le nom et le visage. Raito décide d'utiliser le Death Note pour exterminer les criminels, dans le but d'éradiquer le Mal et de bâtir un monde parfait dont il sera le dieu.

Mais les nombreuses morts inexpliquées de criminels à travers le monde attirent l'attention d'Interpol et du mystérieux *L*, un détective capable de résoudre n'importe quelle énigme, mais dont personne ne connaît ni le visage ni le nom. L décide d'enquêter pour capturer le tueur en série, surnommé par le grand public « Kira ». Entre Raito et L, tous deux persuadés d'agir pour la justice, s'engage un combat acharné pour découvrir en premier l'identité de l'autre...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

I) Définition et premières propriétés **2**

II) Autres Définitions et conséquences immédiates **4**

II.1. Avec un projeté orthogonal 4

II.2. Avec les normes 5

II.3. Avec les coordonnées 6

II.4. Ce qu'il faut retenir 7

III) Propriétés du produit scalaire **8**

IV) Applications **10**

IV.1. Aux Droites 10

IV.2. Aux Cercles 11

IV.3. A la trigonométrie 12

L'ESSENTIEL :

- Découvrir les applications de la fonction dérivée
- Connaître les formules pour trouver une fonction dérivée
- Savoir étudier un sens de variation d'une fonction en utilisant sa dérivée.

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »

JOHN LOUIS VON NEUMANN

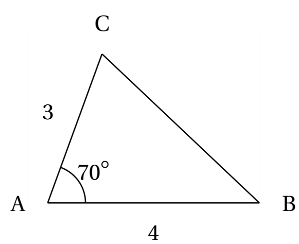
CHAPITRE 11 :

PRODUIT SCALAIRE

Au fil du temps

Le produit scalaire est une nouvelle opération, qui a deux vecteurs associe un nombre réel. Etymologiquement, le mot « scalaire » provient du latin *scala* qui signifie échelle, historiquement le mot « scalaire » en mathématiques désigne un nombre réel. Si on veut comprendre le lien entre les deux, il faut remonter à l'empire romain. Dans les quartiers pauvres où s'élevaient de grands immeubles surpeuplés appelés *Insulae*, des échelles servaient parfois à passer d'un étage à l'autre. A l'époque, on désignait par « échelle 2 » ce qu'on appelerait aujourd'hui « étage 2 ». C'est ainsi que le mot échelle (scala) fut associé à l'idée de nombre.
Élément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions. Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant. Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent seulement à l'aide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de produit intérieur ou produit scalaire. C'est sous cette forme qu'il apparaît par la suite. Sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre linéaire et, de propriété, deviendra définition.
La notation du produit scalaire à l'aide d'un point ou d'une croix provient de Josiah Willard Gibbs, dans les années 1880.
Le produit scalaire possède de multiples applications. En physique, il est, par exemple, utilisé pour modéliser le travail d'une force. En géométrie analytique il permet de déterminer le caractère perpendiculaire de deux droites ou d'une droite et d'un plan.
En particulier il permet de répondre au problème suivant (un prolongement du théorème de Pythagore) :

Exemple :
ABC est un triangle tel que AB = 4 ; AC = 3 et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 70^\circ$. Calculer BC.



***Solution* :**
Soit H le projeté orthogonal de C sur le segment [AB], notons CH = h, AH = x. Dans ce cas BH = $4 - x$.
Dans le triangle rectangle BHC on obtient en utilisant le théorème de Pythagore :

$$\text{BC}^2 = \text{BH}^2 + \text{HC}^2 = (4-x)^2 + h^2 = 16 - 8x + x^2 + h^2$$

Dans le triangle rectangle AHC on a :

$$\cos 70^\circ = \cos\frac{7\pi}{18} = \frac{\text{AH}}{\text{AC}} = \frac{x}{3} \iff x = 3\cos\frac{7\pi}{18} \simeq 1,03$$

Dans ce même triangle, on obtient d'après le théorème de Pythagore :

$$\text{AH}^2 + \text{HC}^2 = \text{AC}^2 \iff x^2 + h^2 = \text{AC}^2 \iff h^2 = 9 - 9\cos^2\frac{7\pi}{18}$$

Nous en déduisons le carré de la longueur BC :

$$\text{BC}^2 = 16 - 8\times 3\cos\frac{7\pi}{18} + 9\cos^2\frac{7\pi}{18} + 9 - 9\cos^2\frac{7\pi}{18} = 16 + 9 - 24\cos\frac{7\pi}{18} = 25 - 24\cos\frac{7\pi}{18}$$

I) Définition et premières propriétés

En procédant de manière identique dans le cas général on obtient le théorème d'Al-Kashi qui généralise celui de Pythagore :

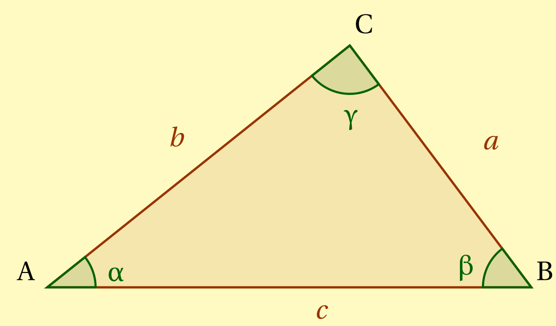
Théorème 1. (d'Al-Kashi)

Soit un triangle ABC, dans lequel on utilise les notations usuelles exposées sur la figure ci-contre. Alors on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Exemples :

Traiter des cas dans un triangle équilatéral, un carré, un rectangle ...

Si ABC est un triangle tel que $AB = 7$; $AC = 5$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 30^\circ$ alors d'après le théorème d'Al-Kashi :

$$BC^2 = 49 + 25 - 70\cos\frac{\pi}{6} = 74 - 70 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 74 - 35\sqrt{3}$$

et donc :

$$BC = \sqrt{74 - 35\sqrt{3}}$$

Remarque : Lorsque le triangle est rectangle en C alors $\gamma = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$. Ainsi,

$$2ab\cos\gamma = 2ab\cos\frac{\pi}{2} = 2ab \times 0 = 0$$

On retrouve dans ce cas $c^2 = a^2 + b^2$, l'égalité donnée par le théorème de Pythagore.

Définition 1.

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\vec{u};\vec{v})$$

En particulier :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$$

Si l'un des vecteurs est nul alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ par convention.

Exemples :
Retraiter les cas dans un des figures particulières.

Si ABC est un triangle tel que $AB = 7$; $AC = 5$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 30°$ alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7\times 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{105}{2}$.
Si ABC est un triangle rectangle en A alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = AB\times AC\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Si ABC est un triangle tel que $AB = 1$, $AC = 1$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 120°$ alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0,5$$

Théorème 2.

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul si et seulement si $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Preuve

$\Longleftarrow$) Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos\dfrac{\pi}{2} = ||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times 0 = 0$.

$\Longrightarrow$) Réciproquement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ alors

$$||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos(\vec{u};\vec{v}) = 0$$

Et puisque $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 0$ et donc $(\vec{u};\vec{v}) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ à 2π près.

Exercice du Cours : ABC est un triangle tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18$, $AB = 6$ et $AC = 2\sqrt{3}$.
Calculer la mesure exacte en radians de l'angle $\widehat{BAC}$.

Remarques :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ si et seulement si l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ possède une mesure entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ radians. Autrement dit le produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est strictement positif si et seulement si l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ est aigu.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ si et seulement si l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ est obtu.
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\ \vec{u}\ ||\times||\vec{u}||\cos(\vec{u};\vec{u}) = ||\vec{u}||^2$. On notera par convention : $\vec{u}^2 = ||\ \vec{u}\ ||^2$
  De même si A et B sont deux points , on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = ||\ \overrightarrow{AB}\ ||^2$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. La réciproque est fausse, le fait que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ n'implique pas nécessairement que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. Les contres-exemples sont nombreux, il suffit de choisir deux vecteurs orthogonaux.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} = k\vec{v}$ alors :

  Si $k > 0$ on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = k||\vec{u}||^2$

  Si $k < 0$ on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = -k||\vec{u}||^2$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ car pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, on a la multiplication dans $\mathbb{R}$ qui est commutative, et $(\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v})$ or $\cos(x] = \cos(-x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

II) Autres Définitions et conséquences immédiates

II.1. Avec un projeté orthogonal

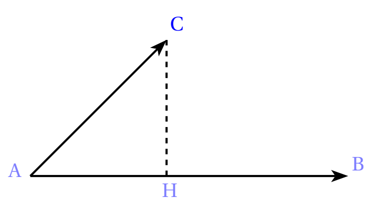
Remarque : La définition précédente suppose connue la définition de la fonction cosinus. Mais il est possible d'éviter de faire appel à cette fonction pour calculer un produit scalaire.
Pour cela, considérons A, B et C trois points distincts, la trigonométrie du triangle rectangle permet de calculer le produit scalaire grâce à une projection orthogonale.

Définition 2.

Le **projeté orthogonal** d'un point C sur une droite (AB) est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC
Par analogie, on peut définir le projeté orthogonal d'un objet mathématique quelconque sur une droite, en projetant chacun des points qui le compose sur cette droite.

Ainsi, si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), nous obtenons les deux cas possibles suivants :

$\hat{\mathrm{A}}$ est aigu

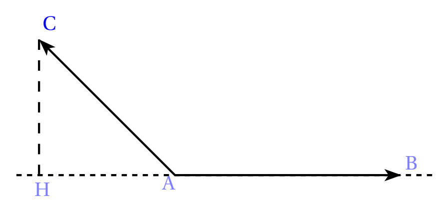


$$\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}} \Longleftrightarrow \mathrm{AH} = \mathrm{AC} \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \mathrm{AB} \times \mathrm{AH}$$

Or, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AH} \times \cos 0 = \mathrm{AB} \times \mathrm{AH}$.

$\hat{\mathrm{A}}$ est obtu



$$\cos\left(\pi - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right) = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}} \Longleftrightarrow \mathrm{AH} = \mathrm{AC} \times \cos\left(\pi - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right)$$

Or, $\cos(\pi - x) = -\cos x$ d'où $\mathrm{AH} = -\mathrm{AC} \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = -\mathrm{AB} \times \mathrm{AH}$$

Or, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AH} \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right) = -\mathrm{AB} \times \mathrm{AH}$

Dans les deux cas, le produit scalaire est alors en valeur absolue égal au produit des distances AH et AB.
Si A se trouve entre H et B, le produit scalaire est négatif et positif sinon.
On remarque que si H est confondu avec A, alors le produit scalaire est nul.

Théorème 3.

Soit A et B deux points distincts et soit H le projeté orthogonal d'un point C sur la droite (AB) alors

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \pm \mathrm{AB} \times \mathrm{AH}$$

suivant la nature de l'angle $\hat{\mathrm{A}}$

Exercice du Cours : On considère un carré ABCD de côté a et de centre O, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}\cdot\mathrm{OI}$, $\overrightarrow{JD}\cdot\overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BC}$ où I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AD].

II.2. Avec les normes

Théorème 4.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

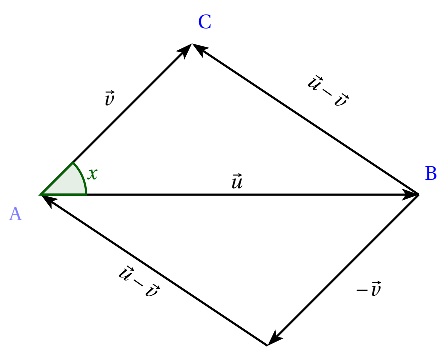
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\,\vec{u}\,||^2+||\,\vec{u}\,||^2-||\,\vec{u}-\vec{v}\,||^2\right) \quad \text{et} \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\,\vec{u}+\vec{v}\,||^2-||\,\vec{u}\,||^2-||\,\vec{v}\,||^2\right)$$

Preuve

Première formule :

⇝ Si l'un des vecteurs est nul, par exemple si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\vec{v}=0$ par définition.
De plus $\frac{1}{2}\left(||\,\vec{u}\,||^2+||\,\vec{v}\,||^2-||\,\vec{u}+\vec{v}\,||^2\right)=\frac{1}{2}\left(||\,\vec{0}\,||^2+||\,\vec{v}\,||^2-||\,\vec{v}\,||^2\right)=0$, ainsi les deux expressions sont égales lorsqu'au moins un des deux vecteurs est nul.

⇝ Si aucun des deux vecteurs n'est nul.



On note $\overrightarrow{AB}$ un représentant du vecteur $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $\vec{v}$ d'origine A.
Dans ce cas $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ comme sur la figure ci-contre.

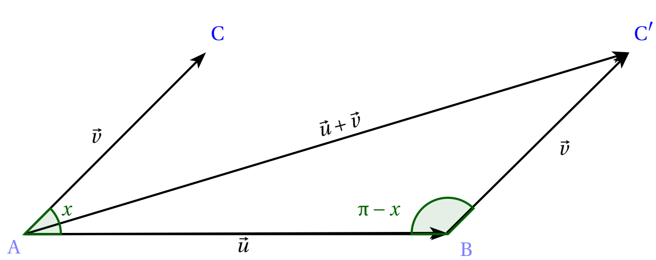
D'après Al-Kashi dans le triangle ABC on a :

$$\begin{aligned}
||\vec{u}-\vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-2||\vec{u}||\times||\vec{v}||\cos(x)\\
||\vec{u}-\vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v} \quad \text{(identité remarquable)}\\
\iff \vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(||\,\vec{u}\,||^2+||\,\vec{u}\,||^2-||\,\vec{u}-\vec{v}\,||^2\right)
\end{aligned}$$

Deuxième formule :

⇝ Si l'un des vecteurs est nul, par exemple si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\vec{v}=0$.
De plus $\frac{1}{2}\left(||\,\vec{u}+\vec{v}\,||^2-||\,\vec{u}\,||^2-||\,\vec{v}\,||^2\right)=\frac{1}{2}\left(||\,\vec{v}\,||^2-||\,\vec{0}\,||^2-||\,\vec{v}\,||^2\right)=0$, ainsi les deux expressions sont égales lorsqu'au moins un des deux vecteurs est nul.

⇝ Si aucun des deux vecteurs n'est nul.



On note $\overrightarrow{AB}$ un représentant du vecteur $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $\vec{v}$ d'origine A.
Dans ce cas $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$ comme sur la figure ci-contre.
D'après Al-Kashi dans le triangle ABC′ on a :

$$\begin{aligned}
||\vec{u}+\vec{v}||^2 &= ||-\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-2||-\vec{u}||\times||\vec{v}||\cos(\pi-x)\\
&= ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-2||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times(-\cos(x))\\
||\vec{u}+\vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} \quad \text{(identité remarquable)}\\
\iff \vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(||\,\vec{u}+\vec{v}\,||^2-||\,\vec{u}\,||^2-||\,\vec{v}\,||^2\right)
\end{aligned}$$

II.3. Avec les coordonnées

Théorème 5.

On considère un repère **orthonormal**, un vecteur $\vec{u}(x;y)$ et un vecteur $\vec{v}(x';y')$. Alors on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Preuve

On sait que dans un repère orthonormal $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $||\vec{v}|| = \sqrt{x'^2+y'^2}$. De plus $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$ et donc $||\vec{u}+\vec{v}|| = \sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}$.
Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème précédent :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left((x+x')^2+(y+y')^2-x^2-y^2-x'^2-y'^2\right) = \frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'\right) = xx'+yy'$$

Exemple :

Si $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(6;-3)$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 6+3\times(-3) = 3$

Le théorème 2 énoncé dans repère orthonormal comme ci-dessus donne :

Propriété 1.

Dans un repère orthonormal, $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow xx'+yy' = 0$

Exercice du Cours : Soient les points $A(1,-2)$, $B(2,3)$, $C(6,1)$ et $D(-4,3)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

Remarques :

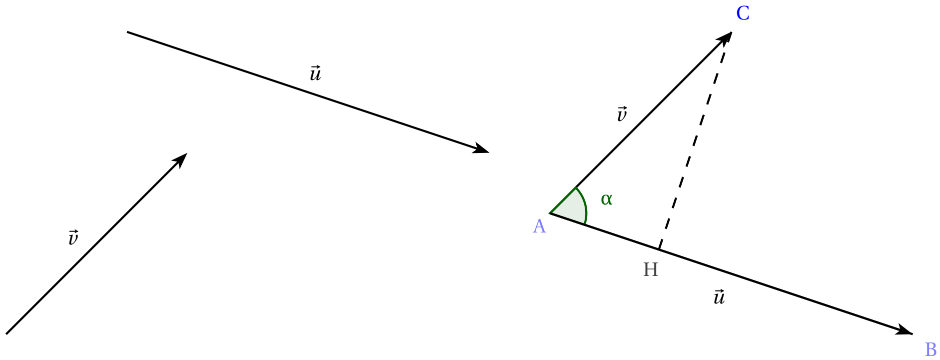
- Le produit scalaire permet de donner une bonne définition d'un repère orthogonal. En effet $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthogonal si et seulement si $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$
- Si un vecteur est orthogonal à tout vecteur alors c'est le vecteur nul.
  En effet, on a en particulier $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2+y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ et $y = 0$

Exercice du Cours : Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne $A(1,1)$, $B(4,1)$ et $C(3,3)$. Calculer de quatre manière différentes $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

II.4. Ce qu'il faut retenir

Si on se donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et si on nomme A, B et C les points vérifiant :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v}$$

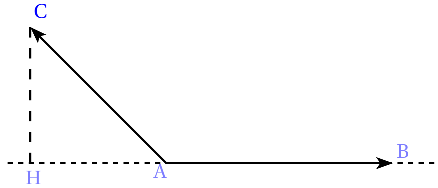
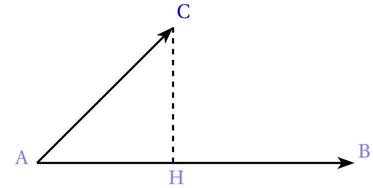


On note $(\vec{u};\vec{v}) = \alpha \quad [2\pi]$.
Il existe 4 manières différentes de calculer le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

1. **Avec le cosinus** : $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\vec{u};\vec{v}) = AB \times AC \times \cos\alpha}$
2. **Avec le projeté orthogonal** : $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH}$ suivant si l'angle α est obtu ou aigu.
3. **Avec les normes** : $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)}$ et $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)}$
4. **Avec les coordonnées** : Si dans un repère **orthonormal** $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$

Remarque : Les quatres formules sont équivalentes, c'est-à-dire que nous aurions choisir de définir le produit scalaire par n'importe laquelle des quatres, nous aurions retrouvé exactement les mêmes propriétés au final.

On retiendra enfin que le signe de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ renseigne sur la nature de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$.

Signe du produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$	$\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$	$\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$
Nature de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$	Angle obtu	Angle droit	Angle Aigu
Illustration	 C H A B	 C A B	 C A H B

III) Propriétés du produit scalaire

Propriété 2.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel λ on a :

1. Symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. Bilinéarité(linéarité par rapport aux deux variables :)
   $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (linéarité par rapport à la première variable)
   $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ (linéarité par rapport à la seconde variable)
   $\vec{u}\cdot\lambda\vec{v}=\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
3. Définie : $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \Longleftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$
4. Positive : $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$

Remarque : On dit que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Preuve

La démonstration avec la formule des coordonnées dans un repère orthonormal est la plus simple.

Notons $\vec{u}(x;y)$, $\vec{v}(x';y')$ et $\vec{w}(x'';y'')$

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'=x'x+y'y=\vec{v}\cdot\vec{u}$ par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$
2. $$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=x(x'+x'')+y(y'+y'')=xx'+xx''+yy'+yy''=xx'+yy'+xx''+yy''=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
   $$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(x+x')x''+(y+y')y''=xx''+x'x''+yy''+y'y''=xx''+yy''+x'x''+y'y''=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
   $$\vec{u}\cdot\lambda\vec{v}=x\lambda x'+y\lambda y'=\lambda xx'+\lambda yy'=\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}=\lambda(xx'+yy')=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
3. $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \Longleftrightarrow x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow x=0$ et $y=0 \Longleftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$
4. $\vec{u}\cdot\vec{u}=x^2+y^2\geq 0$

Exemple :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}$$

Exercice du Cours : ABCD est un rectangle de centre O tel que $AB=4$ et $BC=3$.
Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

Solution :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}\\
=\ & \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{DB}\\
=\ & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}\\
=\ & AB^2-BC^2\\
=\ & 16-9=7
\end{aligned}$$

Application : Retrouver, à l'aide du produit scalaire, le fait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Solution : Notons A', B' et C' les projetés orthogonaux de A, B et C respectivement sur (BC), (AC) et (AB) et $H = (BB') \cap (CC')$. On veut montrer que $H \in (AA')$.
On remarque que $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
Par conséquent

$$\begin{array}{rc}
 & \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} \\
\iff & (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} \\
\iff & \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \\
\iff & \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{car } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} \\
\iff & \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}
\end{array}$$

Les droites (AH) et (BC) sont donc perpendiculaires, ce qui prouve que la droite (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC. CQFD

Règle pratique : pour calculer un produit scalaire, on peut décomposer un vecteur (ou les deux) suivants des directions orthogonales.

Théorème 6. (Identités remarquables)

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
3. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Preuve

1. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
2. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
3. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Application :

1. Identité du parallélogramme : $(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = 2(\vec{u}^2 + \vec{v}^2)$
   Si ABCD est un parallélogramme, en notant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ on obtient une relation entre les diagonales et les côtés du parallélogramme : $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$
2. Inégalité triangulaire : Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq || \vec{u} || \times || \vec{v} ||$ (puisque $\cos\theta \leq 1$), on a :

$$\begin{array}{rc}
 & || \vec{u} + \vec{v} ||^2 \leq || \vec{u} ||^2 + || \vec{v} ||^2 + 2 || \vec{u} || \times || \vec{v} || \\
\iff & || \vec{u} + \vec{v} ||^2 \leq (|| \vec{u} || + || \vec{v} ||)^2 \\
\iff & || \vec{u} + \vec{v} || \leq || \vec{u} || + || \vec{v} ||
\end{array}$$

IV) Applications

IV.1. Aux Droites

Dans toute cette partie, on se place dans un repère orthonormal.

Rappel

Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels, dans ce cas $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur.

Réciproquement, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y)$ tels que $ax + by + c = 0$, avec $(a;b) \neq (0,0)$ est une droite dirigée par $\vec{u}(-b;a)$.

Définition 3.

Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est **normal** à une droite d si et seulement si sa direction est orthogonale à celle de d

Théorème 7.

Soit d une droite passant par un point A et $\vec{n}$ un vecteur normal à d.
Alors d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$.
Autrement dit, $\mathrm{M}(x;y) \in d \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$.

Preuve

Remarquons déjà qu'il n'existe qu'une droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.
Notons $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ et $\vec{n}(a;b)$.
L'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$ est l'ensemble des points tels que :

$$\begin{pmatrix} x - x_\mathrm{A} \\ y - y_\mathrm{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff a(x - x_\mathrm{A}) + b(y - y_\mathrm{A}) = 0 \iff ax + by - ax_\mathrm{A} - by_\mathrm{A} = 0$$

ce qui est l'équation cartésienne d'une droite D de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.
Or $\vec{u} \cdot \vec{n} = -ba + ab = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, ou encore $\vec{n}$ est normal à D.
De plus $ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} - ax_\mathrm{A} - by_\mathrm{A} = 0$ donc A vérifie l'équation cartésienne de D, ie $\mathrm{A} \in \mathrm{D}$.
Comme il n'existe qu'une droite de vecteur normal $\vec{n}$ passant par A, on a $\mathrm{D} = d$.

Remarque : Si d est une droite d'équation $ax + by + c = 0$, alors $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal de d, et réciproquement.

Théorème 8.

Soient les droites d et d' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.
d et d' sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$

Preuve

Considérons les deux vecteurs $\vec{n}(a;b)$ et $\vec{n}'(a';b')$ normaux à d et d'
$d \perp d' \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' \iff aa' + bb' = 0$

Exemples :

1. Dans un repère orthonormal, la droite d a pour équation $x - y + 2 = 0$. Trouver une équation de la droite Δ perpendiculaire à d passant par le point $B(2;1)$.
2. Dans un repère orthonormal, on donne les points $A(0;3)$ et $B(4;-1)$. Trouver une équation de la médiatrice de $[AB]$.

IV.2. Aux Cercles

Dans toute cette partie, on se place dans un repère orthonormal.

Théorème 9.

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Preuve

Notons $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Si $M = A$ ou $M = B$ c'est évident.
Sinon, $\mathscr{C}$ privé des points A et B est l'ensemble des points M du plan tels que AMB soit un triangle rectangle en M, donc l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux i.e $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Théorème 10.

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.
Le cercle $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

où $(x_0; y_0)$ sont les coordonnées du centre du cercle $\mathscr{C}$ et r son rayon.

Preuve

$M(x;y) \in \mathscr{C} \iff OM = r \iff OM^2 = r^2 \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Exemples :

1. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$ est une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $O(-3;1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.
2. On donne les équations suivantes :

   ⇝ $x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$ ⇝ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ ⇝ $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y + 7 = 0$

   Pour chacune des équations précédentes, dites si c'est l'équation d'un cercle. Si oui, préciser son centre et son rayon. Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ trouver une équation :

   ⇝ du cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(1;2)$ passant par $J(3;-2)$

   ⇝ du cercle $\mathscr{C}'$ passant par les points O, $A(4;0)$ et $B(0;2)$.

Exercices du livre : Repère

n° 110 (cercle circonscrit) + 112 (cercle + tangente) + 114 (équations) + 115-116 (algo et condition) + 118-119 (intersections) p 381

IV.3. A la trigonométrie

Travail de l'élève 1 : *Dans cette activité, nous allons démontrer les célèbres formules de trigonométrie suivantes.*

Propriété 3.

Pour tous réels a et b on a : $\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$ $(\star)$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{c} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{array}}$$

Ainsi que les formules de duplication :

$$\boxed{\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}}$$

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires, tels que : $(\vec{i};\vec{u}) = a$ et $(\vec{i};\vec{v}) = b$

1. Démontrons tout d'abord $(\star)$.
   - **a.** Faire le schéma d'un cercle trigonométrique, muni d'un repère $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$, et dessiner deux représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant pour origine O.
   - **b.** Déterminer $(\vec{u};\vec{v})$ en fonction de a et b.
   - **c.** En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos(a-b)$.
   - **d.** Préciser les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de a et b.
   - **e.** En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
   - **f.** En déduire que pour tous réels a et b on a $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
   - **g.** **Application** : En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.
2. Quelle relation connue obtient-on en prenant $b = a$ dans $(\star)$?
3. Grâce à la configuration du rectangle dans le cercle trigonométrique, retrouver les trois formules suivantes de la propriété ci-dessus.
4. Utiliser désormais $(\star)$ pour retrouver les formules de duplication.
5. **Application** : A l'aide des formules de duplications, calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Propriété 4.

Quels que soient les réels a et b :

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Preuve

1. Choisissons un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O, muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. A et B sont les points de $\mathscr{C}$ tels que, en radians, $(\vec{i},\overrightarrow{OA})=a$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OB})=b$. Dans ce cas $A(\cos a;\sin a)$ et $B(\cos b;\sin b)$
   De plus
$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\vec{i}\right)+\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right)=b-a$$
   Exprimons le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ de deux manières différentes :
$$\begin{array}{rrcl} \text{Avec les coordonnées :} & \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} & = & \cos a\cos b+\sin a\sin b \\ \text{D'autre part :} & \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} & = & OA\times OB\times\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\cos(b-a) \end{array}$$
2. On sait que $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$
   En écrivant $a+b=a-(-b)$, on obtient :
$$\cos(a+b)=\cos(a-(-b))=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
3. $\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b=\sin a\cos b-\cos a\sin b$
4. $\sin(a+b)=\sin(a-(-b))=\sin a\cos(-b)-\cos a\sin(-b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

Corollaire 1. (Formules de duplication)

Quel que soit le réel a on a :

1. $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$
2. $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$

Preuve

En utilisant le théorème précédent, il vient :
$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a \qquad \text{et} \qquad \sin 2a=2\sin a\cos a$$
Comme $\cos^2 a+\sin^2 a=1$, on obtient aussi :
$$\cos 2a=2\cos^2 a-1 \qquad \text{et} \qquad \cos 2a=1-2\sin^2 a$$
D'où
$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

Exemple :

1. En remarquant que $\frac{11\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, calculer $\sin\frac{11\pi}{12}$
2. En remarquant que $2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$. Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Exemple :

1. Simplifier l'écriture de $\mathrm{F}(x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$
2. Démontrer que :
   a. $\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x - \cos x$
   b. Pour tout réel a, $1 + \cos a + \sin a = 2\cos\dfrac{a}{2}\left(\cos\dfrac{a}{2} + \sin\dfrac{a}{2}\right)$

Exercices du livre : Repère

n° 90-91-95-98-103-105-107-109-123-127-138 ? p 292

« La vie est faite de hasards contraires aux destinées. »

JOHAN SFAR, Issu du film « Gainsbourg, vie héroïque »