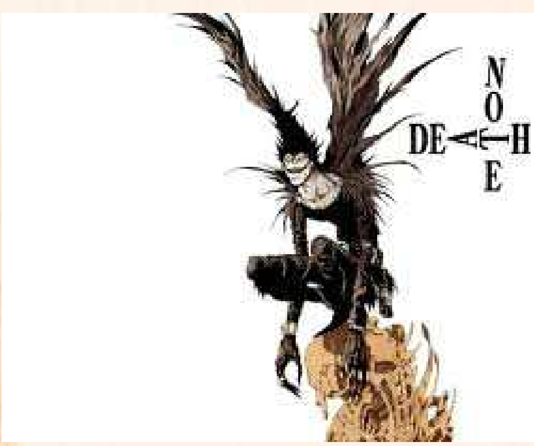
Chapitre 10

Pourquoi avons-nous dérivé ?

Hors Sujet



Titre : « Death Note »
Auteur : Oba et Obata
Présentation succinte : *Death Note* est un manga de type shônen, créé par le scénariste Tsugumi Oba et le dessinateur Takeshi Obata. Il a été prépublié dans un journal de 2003 à 2006, et par la suite publiée en douze tankôbon de 2004 à 2006.
L'histoire est centrée sur *Raito Yagami*, un lycéen surdoué qui juge le monde actuel criminel et corrompu. Sa vie change du tout au tout le jour où il ramasse par hasard un mystérieux cahier intitulé « Death Note ». Ancienne propriété d'un dieu de la mort, le Death Note permet à son utilisateur de tuer toute personne dont il connaît le nom et le visage. Raito décide d'utiliser le Death Note pour exterminer les criminels, dans le but d'éradiquer le Mal et de bâtir un monde parfait dont il sera le dieu.
Mais les nombreuses morts inexpliquées de criminels à travers le monde attirent l'attention d'Interpol et du mystérieux *L*, un détective capable de résoudre n'importe quelle énigme, mais dont personne ne connaît ni le visage ni le nom. L décide d'enquêter pour capturer le tueur en série, surnommé par le grand public « Kira ». Entre Raito et L, tous deux persuadés d'agir pour la justice, s'engage un combat acharné pour découvrir en premier l'identité de l'autre...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Découvrir les applications de la fonction dérivée
- ⇝ Connaître les formules pour trouver une fonction dérivée
- ⇝ Savoir étudier un sens de variation d'une fonction en utilisant sa dérivée.

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée ! »

JOHN LOUIS VON NEUMANN

CHAPITRE 10: POURQUOI AVONS-NOUS DÉRIVÉ ?

Rappels

Soient a et h deux réels tels que $h \neq 0$.

1. Si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **existe et est un nombre réel** ℓ, alors le nombre dérivée en a de la fonction f est le nombre ℓ, noté $f'(a)$, et donc tel que :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2. Si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ **est le coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
Plus exactement, l'équation réduite de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

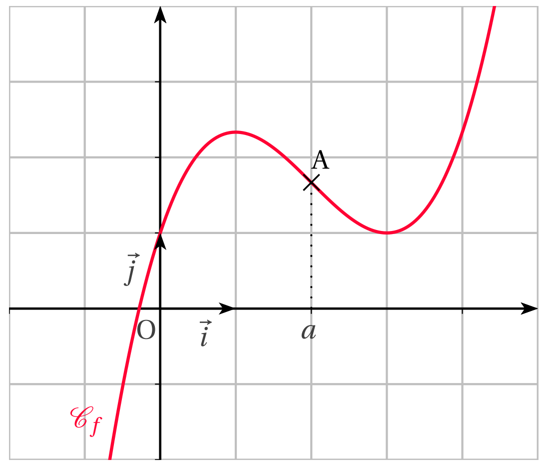
3. f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable en tout a appartenant à I.
On note f' la fonction ainsi définie, qui à tout $x \in \mathrm{I}$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
k (nombre fixé)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax+b$ (a et b fixés)	a	$\mathbb{R}$
x^2 (fonction carrée)	$2x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$ (fonction inverse)	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \backslash \{0\}$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$ (fonction puissance)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$ (fonction racine)	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$

I) Applications

I.1. Signe de la dérivée et variation

Travail de l'élève 1 :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.
Sur Géogébra, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f et placé un point $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_f$, d'abscisse a.

1. **Rappels :**
   a. Donner l'ordonnée de A en fonction de a.
   b. On donne $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   En déduire les équations des tangentes à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a pour $a = 0$, $a = 2$, $a = 4$ et $a = -1$.

2. **Lien entre la dérivée f' de f et les variations de f** :
   Sur Géogébra, on a désormais tracé la tangente T en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   a. En observant la figure dynamique vidéo-projetée, conjecturer :
   i. Les valeurs de a pour lesquelles $f'(a) = 0$ $f'(a) > 0$ et $f'(a) < 0$.
   ii. Le tableau de signes de la fonction f'.
   iii. Le tableau de variations de f.
   b. Quel lien peut-on remarquer entre ces deux tableaux ? L'expliquer de façon intuitive.
   c. On a désormais tracé la courbe Γ représentative de la fonction f' et placé un point $\mathrm{M} \in \Gamma$, de la même abscisse que A, donc $x_\mathrm{M} = a$.
   i. Quelle est l'ordonnée de M ?
   ii. Que se passe-t-il pour la fonction f sur un intervalle où la courbe Γ est en-dessous de l'axe des abscisses ? Au dessus ? Quand elle coupe l'axe des abscisses ?

3. **Applications :**
   a. On donne le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de la dérivée g' d'une fonction g.

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g							

   On sait de plus que $g(2) = -3$ et $g(6) = 4$. Conjecturer le tableau de variation de g.

4. On appelle h la fonction cube.
   a. En utilisant le signe de h', retrouver les variations de h.
   b. Que se passe-t-il pour h quand $h'(x) = 0$? Quelle est la différence avec les fonctions vues précédemment ?

Théorème 1.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

1. f est strictement croissante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$
2. f est constante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$
3. f est strictement décroissante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$

Remarque : On comprend facilement ce théorème en interprétant le nombre dérivée d'une fonction en un point comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de cette fonction en ce point.
La démonstration formelle utilise des notions non au programme.

<u>Preuve</u> **Hors Programme**

$\Rightarrow$) Soit x un réel de I et h un réel non nul tels que $x+h \in \mathrm{I}$.

1. f croissante sur I :
   — Si $h > 0$, alors
   $$x+h \geq x \overset{f\nearrow}{\Longleftrightarrow} f(x+h) \geq f(x) \Longleftrightarrow f(x+h)-f(x) \geq 0 \overset{h>0}{\Longleftrightarrow} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$
   — Si $h < 0$, alors
   $$x+h \leq x \overset{f\nearrow}{\Longleftrightarrow} f(x+h) \leq f(x) \Longleftrightarrow f(x+h)-f(x) \leq 0 \overset{h<0}{\Longleftrightarrow} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$
   Dans tous les cas $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$
   f est dérivable en x donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe et est le nombre réel $f'(x)$.
   Ainsi $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ devient aussi proche que l'on veut de $f'(x) < 0$ à condition de prendre h assez proche de 0.
   Supposons $f'(x) < 0$. Alors, à condition de prendre h assez proche de 0, on peut trouver une valeur de $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ comprise dans l'intervalle non vide $[f'(x);0[$.
   Ceci est absurde car $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ positif. Donc $f'(x) \geq 0$.
2. Si f est constante sur I, alors
   $$f(x+h) = f(x) \Longleftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0 \Longleftrightarrow f'(x) = 0$$
3. De façon analogue à la première partie, on démontre cette fois que
   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$$
   On sait que si l'on donne à h des valeurs proches de 0, alors $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ prend des valeurs négatives. On admet alors ici que sa limite en 0 est aussi négative, i.e que $f'(x) \leq 0$

$\Leftarrow$) Utilise la définition formelle de la limite.

Exemple :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{-3x^2+2x-1}$$

1. Déterminer le domaine de définition de fonction f.
2. On donne

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2-4x-1\right)}{\left(-3x^2+2x-1\right)^2}$$

   a. Etablir le tableau de signes de f'.

   b. En déduire les tableaux de variations de f.

I.2. Extremum local

Proposition 1.

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local.

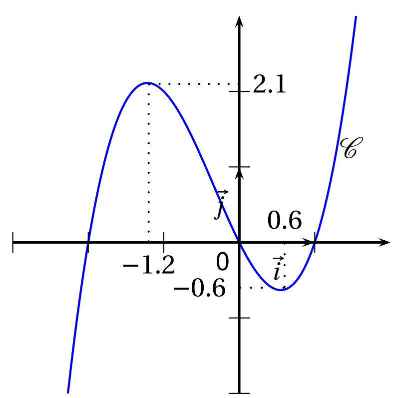
x		a	
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Vairations de f	↘	$f(a)$	↗

x		a	
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Vairations de f	↗	$f(a)$	↘

Exemple :

Soit fonction f définie sur $[-3;2]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-3		-1.2		0.6		2
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	2.1	↘	-0.6	↗	



Ci-contre, on a dessiné la représentation graphique de f.
On constate bien que $2,1$ est un extremum local car pour tout $x \in [-2;0]$ on a $f(x) \leq 2,1 = f(-1,2)$
De même, $f(0,6) = -0,6$ est un minimul local car pour tout $x \in [0;1]$ on a $f(x) \geq -0,6$

Proposition 2.

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I et a est un réel de I.
Si $f(a)$ est un extremum local de f, alors $f'(a) = 0$

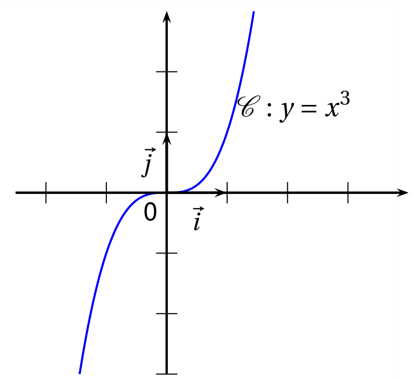
Remarques :

- Nous admettrons ces deux propositions.
- La réciproque de la deuxième proposition est fausse.

Contre-Exemple :

Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On sait que $f'(x) = 3x^2$.
Donc on a le tableau suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	



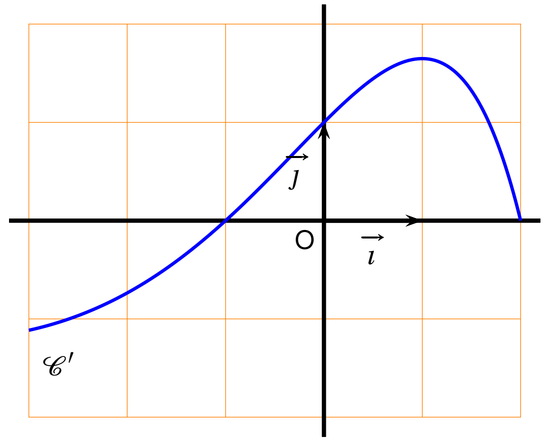
Ci-contre, on a dessiné la représentation graphique de f.
On constate bien qu'il n'y a pas d'extremum local en 0.

Exercice 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
On dit que f est une fonction ***impaire****.*
2. On donne $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   a. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.
   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
   c. Préciser les extrema locaux de f.
3. Tracer la représentation graphique de la fonction f à la calculatrice sur l'intervalle $[-4;4]$ et vérifier graphiquement vos résultats.
4. Quelle symétrie présente cette courbe ?
Les courbes représentatives de fonctions impaires sont symétriques par rapport à …

Exercice 2 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-contre.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées (1 ; 0).

II) Opérations sur les fonctions dérivées

Travail de l'élève 2 : Soient f, g et h les fonctions définies par :

$$u(x) = 5x - 7 \qquad v(x) = -3x^2 + 2x - 1 \qquad f(x) = (5x-7)(-3x^2+2x-1) \qquad g(x) = \frac{5x-7}{-3x^2+2x-1}$$

1. Déterminer les domaines de définition des fonctions u, v, f et g.
2. On donne

$$u'(x) = 5 \qquad v'(x) = -6x + 2 \qquad f'(x) = -45x^2 + 62x - 19 \qquad g'(x) = \frac{15x^2 - 42x + 9}{(5x-7)^2}$$

   a. Aviez-vous les formules nécessaires pour retrouver u', v', f' et g' ?
   b. Calculer et simplifier $u'v + v'u$. Que constatez-vous ?
   c. Calculer et simplifier $u'v - v'u$. Que constatez-vous ?
   d. Etablir les tableaux de signes de f' et g'.
   e. En déduire les tableaux de variations de f et g.

On a déjà vu le côté pratique de connaître les fonctions dérivées pour établir les variations d'une fonction. Voyons désormais quelques formules pour trouver les dérivées plus simplement qu'avec la limite du taux de variations.

Dans le tableau suivant, u et v sont deux **fonctions** dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel. Remarquons que les fonctions ci-dessous sont dérivables sur I.

Fonctions	Dérivées	Exemples
ku	ku'	Si $f(x)=5x^3$ alors $f'(x)=5\times 3x^2=15x^2$
$u+v$	$u'+v'$	Si $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ alors $f'(x)=1+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=1-\dfrac{1}{x^2}$
$u\times v$	$u'v+uv'$	Si $f(x)=x\sqrt{x}$ alors $f'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2x+x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$
u^n, $n\in\mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$	Si $f(x)=(5x+3)^7$ alors $f'(x)=7\times 5\times(5x+3)^6=35(5x+3)^6$
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	Si $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ alors $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	Si $f(x)=\dfrac{3x+2}{4-2x}$ alors $f'(x)=\dfrac{3(4-2x)-(3x+2)\times(-2)}{(4-2x)^2}=\dfrac{16}{(4-2x)^2}$

Donner ci-dessous les calculs intermédiaires de chaque exemple ...

Remarque : Notons que nous ne savons pas encore dériver n'importe quelle type de fonction connue. Par exemple, nous ne savons pas dériver les fonctions trigonométriques, ni les fonctions du type $\sqrt{3x-1}$.
Et pour les fonctions contenant une valeur absolue, on doit les écrire sans, ou alors distinguer les cas.

***Preuve* HP**

Ces formules s'obtiennent en revenant à la définition du nombre dérivé.

1. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h\neq 0$ on a :

$$\frac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h}=\frac{ku(a+h)-ku(a)}{h}=k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

ce qui tend vers $ku'(a)$ quand $h\longrightarrow 0$

2. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h\neq 0$ on a :

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=\frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

ce qui tend vers $u'(a)+v'(a)$ quand $h\longrightarrow 0$

3. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h\neq 0$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)-v(a)u(a+h)+v(a)u(a+h)}{h}\\ &= v(a)\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+u(a)\frac{v(a+h)+v(a)}{h}\end{aligned}$$

ce qui tend vers $u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$ lorsque $h\longrightarrow 0$

Preuve (Suite)

4. Seul le cas $n=2$ est faisable en 1S. En effet la démonstration dans le cas où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 et beaucoup moins facile et utilise des arguments que nous n'avons pas encore abordés…
Pour $n=2$, donc si $f=u^2=u\times u$, on applique la formule pour la dérivée du produit et on obtient (donc en prenant $v=u$) :

$$f'=u'u+uu'=2uu'$$

Pour $n=3$, donc lorsque $f=u^3=u^2\times u$, on applique le résultat précédent et la formule du produit (en prenant cette fois $v=u^2$) et on obtient :

$$f'=u'u^2+u\times 2uu'=u^2u'+2u^2u'=3u^2u'$$

On procéderait de même pour le cas $n=4$, puis pour le cas $n=5$, …. Cette technique ne permet néanmoins pas de généraliser dans le cas où n est quelconque, c'est pourquoi on utilisera en terminale S un nouveau type de raisonnement (le raisonnement par récurrence), pour généraliser ce type de propriété ! !

5. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h\neq 0$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{v}(a+h)-\frac{1}{v}(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h}\\ &= \left(\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}\right)\times\frac{1}{h}\\ &= \frac{v(a)-v(a+h)}{v(a+h)v(a)}\times\frac{1}{h}\\ &= -\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\times\frac{1}{v(a+h)v(a)}\end{aligned}$$

ce qui tend vers $-v'(a)\times\dfrac{1}{v(a)\times v(a)}=-\dfrac{v'(a)}{v^2(a)}$ lorsque $h\longrightarrow 0$

6. On déduit $(\dfrac{u}{v})'$ de la formule précédente et de celle du produit, pour obtenir :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(u\times\frac{1}{v}\right)'=u'\times\frac{1}{v}+u\times\left(-\frac{v'}{v^2}\right)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Exercice 3 : Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition, calculer leur fonction dérivée, puis dresser leur tableau de variations :

$$f:x\longmapsto\frac{5x^2}{3}+\frac{3}{4}x+\frac{1}{6}\qquad f:x\longmapsto x^2\sqrt{2}-x\sqrt{5}+\sqrt{3}\qquad f:x\longmapsto -x^3+5x^2-2$$

$$f:x\longmapsto\frac{1}{x}+4x\qquad f:x\longmapsto\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}x\qquad f:x\longmapsto\frac{-x+2}{2x+5}$$

Exercice 4 : Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition et calculer leur fonction dérivée :

$$f:x\longmapsto(2x+3)\sqrt{x}\qquad f:x\longmapsto(3\sqrt{x}+1)^4\qquad f:x\longmapsto(5x^4+2x^3-4x+1)\times\frac{1}{x}$$

$$f:x\longmapsto\frac{1}{9}-\frac{1}{x^3}\qquad f:x\longmapsto\frac{x^2+5x-2}{x^7-4}\qquad f:x\longmapsto\frac{x^2-x+7}{5}\qquad f:x\longmapsto\frac{\sqrt{x}}{2x+5}$$

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}x^2+2x+1$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$
3. En déduire le tableau de variations de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 6 :

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ par $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2$
   a. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
   b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x+4}$.
   a. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ et calculer sa dérivée.
   b. En utilisant les questions précédentes, établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$

Exercice 7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente $\mathrm{T_A}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente $\mathrm{T_B}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en B
4. Vérifier graphiquement vos résultats en traçant $\mathscr{C}_f$, $\mathrm{T_A}$ et $\mathrm{T_B}$ à la calculatrice.

Exercice 8 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer T et $\mathscr{C}_f$ sur votre calculatrice.
4. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;3]$.
5. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.

Exercice 9 : Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{2005} - 1}{h}$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^{2005}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Puis calculer $f'(0)$.
2. Calculer le taux de variation de la fonction f entre 0 et h.
3. Conclure.

« La vie est faite de hasards contraires aux destinées. »

JOHAN SFAR, Issu du film « Gainsbourg, vie héroïque »