# Exercices
# La suite des suites !

**Exercice 1** : Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui, déterminer le premier terme et la raison.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7 - 4n$ ;
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n^2 - 1$ ;
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (n+1)^2 - n^2$ ;
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = 5n + 1$ ;
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \dfrac{n}{n+1}$ ;

**Exercice 2** : Calculer la somme $A = 100 + 103 + 106 + \cdots + \cdots + 400$.

**Exercice 3** : Une entreprise doit envoyer un certain nombre de colis en province. Un transporteur propose les conditions suivantes : 98 €pour le premier colis et une réduction de 3 €pour chaque colis supplémentaire.

1. Combien coûte l'envoi de 10 colis ?
2. Le budget transport de l'entreprise est de 50000 €. Combien de colis l'entreprise peut-elle envoyer ?

**Exercice 4** : On reprend le contexte de l'activité introductive. Le lapin blanc décide pour son second, le lapin rouge de donner dès sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans des carottes de la manière suivante :

- 417 carottes la première semaine ;
- Chaque semaine deux carottes de moins que la semaine précédente.

On note $v$ la suite telle que $v_n$ vaut le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour de sa $n-$ième semaine. Notons que $v_1 = 417$ et que $v_0$ n'existe pas.

1. Justifier que $(v_n)$ est une suite arithmétique ; préciser sa raison et son sens de variation.
2. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
   - **a.** Jusqu'à quel âge le lapin rouge peut-il se nourrir à satiété ?
   - **b.** Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin rouge au cours de son adolescence. On devra donc calculer :

$$S = v_1 + v_2 + \cdots + v_{208} = \sum_{i=1}^{i=208} v_i$$

   - **c.** Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin rouge (fort économe comme son frère) met toutes les autres de côté.
     Déterminer le nombre de carottes économisées par le lapin rouge.
   - **d.** Grand amateur de montre, le lapin rouge décide de troquer ses carottes contre des montres mais l'inflation existe au pays des merveilles. Il faut 10% de carottes supplémentaires pour obtenir une montre qu'au temps du lapin bleu. Le lapin rouge est-il perdant par rapport à son frère ?
4. Le lapin blanc constatant l'injustice subit par le lapin rouge décide d'utiliser une autre méthode pour les « carottes de poches » du lapin suivant, le lapin vert. Il le rémunère de sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans de la manière suivante :
   - 1 carotte la première semaine ;
   - Chaque semaine trois carottes de plus que la semaine précédente ;
   - 100 carottes les 6 derniers mois.

   On note $w$ la suite telle que $w_0 = 1$ et $w_n$ désigne le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour où il fête ses $n$ semaines.
   - **a.** La suite $w$ est-elle arithmétique ?
   - **b.** Plus précisément déterminer le rang jusqu'au quel $w$ se comporte comme une suite arithmétique.

**c.** Identique à ses frères le lapin rouge économise dès qu'il reçoit plus de 300 carottes par semaine. Mais durant les 6 derniers mois il mange un peu de ses économies de manière à manger 300 carottes exactement par semaine. Sachant que le cours de la carotte a encore augmenté de 50% déterminer le nombre de montres que le lapin rouge possèdera au moment de devenir enfant.

**Exercice 5** : Soit $u$ une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison $r$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, lorsque :

**1.** $u_0 = -2$ et $r = -3$ ; **2.** $u_0 = 2$ et $r = -3$ ; **3.** $u_0 = -3$ et $r = 2$ ; **4.** $u_0 = 3$ et $r = 2$.

**Exercice 6** : Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Si oui, déterminer le premier terme et la raison.

**1.** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\dfrac{2}{5^n}$ ; **2.** $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{3n}}$ ; **3.** $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = 5^{2n+3}$ ; **4.** $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$ ;

**Exercice 7** : Calculer la somme $B = 21 + 63 + 189 + \cdots + 137\,781$

**Exercice 8** : Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bails.
1^er^ contrat : Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 5€ par mois jusqu'à la fin du bail.
2^ème^ contrat : Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail [a].

**1.** Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.

**2.** Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, i.e le loyer du 36^ème^ mois.

**3.** Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (*Justifier par des calculs*)

**Exercice 9** : On considère la suite géométrique définie de la façon suivante : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \qquad \forall n \geq 1 \end{cases}$

**1.** Calculer $u_2$ ; $u_3$ ; $u_4$.

**2.** Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ ; en déduire $u_{64}$.

**3.** **La légende du jeu d'échec** : *Le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit : « place 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième case, et ainsi de suite jusqu'à la* 64^ième^ *case. Le roi sourit de la modestie de la demande.* Calculer une valeur approchée du nombre total de grains de blé que le roi devra placer sur l'échiquier.

**Exercice 10** : Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui est un élément radioactif. Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère. Cette proportion de carbone 14 décroît après la mort du tissu de 1,24% en 100 ans.

**1.** Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de 1000 ans, de 2000 ans et de 10000 ans.

**2.** Exprimer le pourcentage de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de $k \times 10^3$ années.

**3.** Un fossile ne contient plus que 10% de ce qu'il devrait contenir en carbone 14. Estimer son âge.

**Exercice 11** : Soit $v$ une suite arithmétique de premier terme $v_0$ et de raison $q$. Dans chaque cas, préciser si la suite $v$ admet une limite. Si oui, la déterminer.

(a). Un bail est un contrat de location

**1.** $v_0 = 2$ et $q = 3$ ; **2.** $v_0 = 2$ et $q = -3$ ; **3.** $v_0 = -2$ et $q = 0.5$ ; **4.** $v_0 = 3$ et $q = -\dfrac{5}{7}$.

**Exercice 12** : Soit $u$ la suite arithmétique de raison $0,8$ et de premier terme $u_0 = -10$. Soit $v$ la suite géométrique de raison $1,2$ et de premier terme $v_0 = -2$ et enfin $w$ la suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $w_0 = 5$.

1. Déterminer le sens de variation des suites $u$, $v$ et $w$.
2. Déterminer les limites des suites, $u$, $v$ et $w$.
3. Déterminer le rang à partir duquel :

   **a.** $u_n \geq 10^6$ ; **b.** $v_n \leq -10^6$ ; **c.** $|w_n| \leq 10^{-6}$.

**Exercice 13** : On considère la suite $u$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n + 5}$

1. **a.** Calculer les 7 premiers termes de la suite $u$ .
   **b.** Quelles conjectures peut-on émettre sur le signe de $u_n$, le sens de variation et la convergence de $u$ ?
   **c.** Calculer les 7 premiers termes de la suite $v$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite $v$ ?
2. Justifier que pour tout entier naturel $n$ on a $u_n > 0$.
3. **a.** Montrer que la suite $v$ est une suite arithmétique. On donnera sa raison.
   **b.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
4. **a.** Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
   **b.** Etudier le comportement à l'infini de la suite $v$, puis celui de la suite $u$.

**Exercice 14** : On partage un carré de côté 1 en quatre carrés de même taille et on noircit le carré inférieur gauche. On applique le même procédé au carré en haut à droite. Et ainsi de suite. Quelle sera l'aire de la partie noire lorsqu'on poursuit indéfiniment la construction ?

**Exercice 15** : Soit la suite $v$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 1000$ et $v_{n+1} = 1,005 \times v_n + 30$
On considère l'algorithme ci-contre.

1. **a.** Faire fonctionner l'algorithme pour $n = 4$. Obtient-on $v_4$ ?
   **b.** Transformer l'algorithme de façon à obtenir $v_n$ en fonction de $n$
   **c.** Programmer cet algorithme et déterminer $v_{60}$
2. On considère la suite $u$ définie par $u_n = v_n + 6000$.
   **a.** Démontrer que la suite $u$ est géométrique.
   **b.** En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$, puis vérifier le résultat de la question précédente.
3. On place 1000 €sur un livret qui rapporte $0,5\%$ par mois, à la fin de chaque mois, on y verse, en plus, la somme de 30€.

Ce livret est bloqué pour 5 ans, ce qui signifie que, sur cette période, il est impossible de retirer de l'argent. Donner la somme présente sur ce livret au terme du contrat.

**Algorithme 1 :**

**Variables**
S $\in \mathbb{R}$ ; $n$ et $k$ sont des nombres entiers naturels.

**Début**
Saisir $n$
S := 1000 et $k$ := 0
**Tant que** $(k < n)$ **Faire**
$k := k + 1$ et S := $1,005 \times$ S
**Fin Tant que**
Afficher S.
**Fin**

## Des exercices donnés en devoir

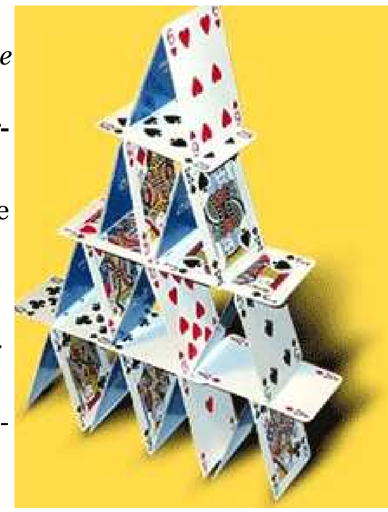
**_Exercice 16_ : 2 points**

Calculer les sommes suivantes : $S_1 = 1+2+3+\cdots+2014+2015$ $S_2 = 6+18+54+\cdots+354294$

*On prendra soin de rédiger la réponse clairement. Notamment, pour* $S_2$*, on justifiera la formule utilisée en précisant la suite considérée ainsi que sa nature.*

**_Exercice 17_ : 6 points**

On souhaite construire un château de cartes à $n$ niveaux ($n \geq 1$). On a représenté ci-dessous un château à quatre niveaux. On appelle $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite dont chaque terme $u_n$ est égal au nombre de cartes du niveau $n$ en partant d'en haut. Ainsi $u_1 = 2$ et $u_2 = 5$.



1. Déterminer $u_3$ et $u_4$ grâce au dessin.
2. Donner la nature de la suite $(u_n)$ ainsi que ses éléments caractéristiques *(inutile de justifier)*.
   **A partir de maintenant, toutes les réponses doivent être justifiées par des formules du cours et des calculs.**
3. **a.** Combien de niveaux aura un château dont la dernière rangée est composée de 23 cartes ?
   **b.** En déduire le nombre de cartes d'un tel château.
4. **a.** Exprimer le nombre S de cartes d'un château à $n$ niveaux en fonction de $n$.
   *On prendra soin à n'avoir plus que la lettre n dans l'expression de* S.
   **b.** Quelle est le nombre de niveaux du plus grand château que l'on peut fabriquer si l'on dispose de 500 cartes ?
   **c.** Quelle sera alors le nombre de cartes de la rangée du bas ?

**_Exercice 18_ : 2 points**

La suite $(u_n)$ est arithmétique de raison $r$. On sait que $u_{20} = 10$ et $u_{34} = -18$.

1. Calculer la raison $r$ et $u_0$.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + \cdots + u_{100}$

**_Exercice 19_ : 5 points**

Un capital $C_0 = 10\,000$€ est placé sur un compte coûtant 20€ par an pour frais de gestion, puis rapportant 4% à la fin de chaque année. On nomme $C_n$ le montant disponible sur le compte à la fin de la $n^{eme}$ année, après le versement des intérêts.

1. **a.** Calculer $C_1$ puis $C_2$.
   **b.** Justifier que pour tout $n \geq 0$ on a $C_{n+1} = 1.04C_n - 20.8$
2. On pose $u_n = C_n - 520$ pour tout $n \geq 0$.
   **a.** Pour tout $n \geq 0$, exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
   **b.** En déduire la nature de la suite $(u_n)$ et donner ses éléments caractéristiques.
   **c.** Exprimer alors $u_n$ en fonction de $n$, puis $C_n$ en fonction de $n$.
3. Afficher sur votre calculatrice les premiers termes de la suite $(C_n)$ et en déduire au bout de combien d'années le capital aura au moins doublé.