Exercices
Vecteurs

Exercice 1 : Déterminer le(s) valeur(s) de k telle(s) que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ k+1 \end{pmatrix}$

2. $\vec{u}\begin{pmatrix} -k+1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} k^2+17 \\ 5k-4 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

1. Trouver un réel x tel que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \cos^2(x) \\ -3\sin(x)+6 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} \sin(x) \\ 3 \end{pmatrix}$ soient colinéaires

2. L'opposé de la valeur trouvée précédemment est-elle aussi une solution ?

3. Etes-vous capable de donner d'autres solutions ? toutes les solutions ?

Exercice 3 :

1. Tracer un quadrilatère quelconque ABCD.
Placer les milieux respectifs I, J, K et L des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].

2. Prouver que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

Exercice 4 : ABC est un triangle. Soient D et E les points tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$.

2. En déduire que D appartient à la droite (AE).

Exercice 5 : Soient A et B deux points distinct du plan. On définit le point C tel que $4\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Que peut-on en déduire sur les points A, B et C ? Faire une figure.

Exercice 6 : On donne les points $A(2,1)$, $B(x,4)$ et $C(x+2,3)$.
Pour quelle(s) valeur(s) de x les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 7 : On donne les points $M(x,5)$, $A(2,4)$, $R(3,x-1)$ et $E(2,1)$.
Pour quelle(s) valeur(s) de x les droites (MA) et (RE) sont-elles parallèles ?

Exercice 8 : On considère les points $A(-2;5)$, $B(-1;3)$, $C(5;-2)$ et $D\left(-2;-\dfrac{13}{3}\right)$.
E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB}$.

1. Calculer les coordonnées du point E.

2. Démontrer que les points C, D et E sont alignés.

Exercice 9 : Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(-1;-3)$, $B(-3,3)$, $C(4;2)$ et $D(5;-1)$.
Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle.

Algorithme 1 :

Variable(s) :
a, b, c et d sont des nombres réels
Entrée(s) :
x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C sont des nombres réels
Début
  $x_B - x_A \longrightarrow a$
  Affecter à b la valeur $y_B - y_A$
  c prend la valeur $x_C - x_A$
  $d := y_C - y_A$
  Si ($ad - bc = 0$) **Alors**
    Afficher « ...
  Sinon
    Afficher « ...
  Fin Si
Fin

Exercice 10 :

1. Dans un contexte géométrique, donner le rôle de chacune des variables de l'algorithme ci-contre.
2. Compléter l'affichage.
3. Le tester à la main avec les points A(1; −2), B(3; 5) et C(1; −1).
4. Ecrire cet algorithme sur votre calculatrice graphique.

Exercice 11 : On considère ABCD un parallélogramme non aplati.

1. Donner la décomposition des vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CA}$ dans chacune des bases suivantes :

   a. $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$. **b.** $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$. **c.** $\left(2\overrightarrow{CB};-0,5\overrightarrow{CD}\right)$

3. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$.

Exercice 12 : ABCD est un rectangle. E est le symétrique de C par rapport à B, F est le symétrique de A par rapport à D, G est le point tel que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.
2. En se plaçant dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$, démontrer que G, E et F sont alignés.
3. Soit H le point d'intersection de (EF) et (CD). Exprimer $\overrightarrow{DH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 13 : Soit EFG un triangle. Le point I est tel que $\overrightarrow{GI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{GF}$ et H est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$. Le point O est le milieu de [EG].

1. Faire une figure.
2. Expliquer pourquoi $\left(F;\overrightarrow{FG};\overrightarrow{FE}\right)$ est un repère du plan.
3. En se plaçant dans ce repère, démontrer que les points I, O et H sont alignés.

Exercice 14 : ABC est un triangle.
I est le milieu de [BC] et M est un point de la parallèle à (AB) passant par I.
La parallèle à (AC) passant par I coupe la parallèle à (BC) passant par M en N.

1. **a.** Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie.

   b. Semble-t-il exister une position du point M pour laquelle :

   ⇝ M = N ? ⇝ BCMN est un parallélogramme ? ⇝ BCNM est un parallélogramme ?

2. On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

a. Justifier que les coordonnées du point M peuvent s'écrire $\left(k;\frac{1}{2}\right)$ où k désigne un nombre réel.

b. Exprimer les coordonnées de N en fonction de k.

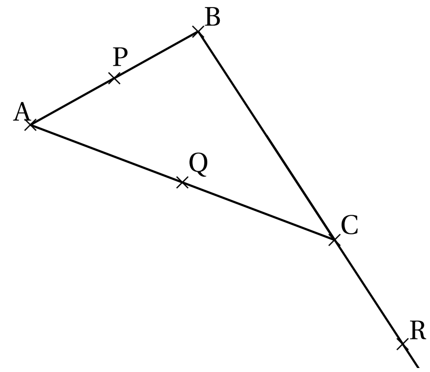
c. Justifier les conjectures émises à la question 1.b..

Exercice 15 : Soit ABC un triangle et a un réel.
On considère les points P, Q et R définis par :

$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{CQ} = a\overrightarrow{CA} \qquad \overrightarrow{CR} = a\overrightarrow{BC}$$

La figure ci-contre correspond au cas où $a = \frac{1}{2}$

Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles les points P, Q et R sont alignés ?



Exercice 16 : Soit un triangle RST et K le milieu de [RS].

1. Construire les points H et L tels que :

$$\overrightarrow{TH} = -3\overrightarrow{TR} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{SL} = -2\overrightarrow{ST}$$

2. Montrer que $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = 2\overrightarrow{TK}$.

3. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{HL}$ dans la base $\left(\overrightarrow{TR};\overrightarrow{TS}\right)$

4. En déduire que (HL) et (TK) sont parallèles.

Exercice 17 : Construire un triangle ABC, puis les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$.
Le but de cet exercice est de démontrer par deux méthodes différentes que D, E *et* F *sont alignés.*

1. **a.** Décomposer $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

b. Démontrer que D, E et F sont alignés.

2. La parallèle à (DE) passant par C coupe [AB] en un point I.

a. Démontrer que E est le milieu de [AI].

b. En déduire que I est le milieu de [EB].

c. Démontrer alors que la droite (CI) est parallèle à la droite (FD). Conclure.

Exercice 18 : On considère un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. On considère les points A$(2;-3)$ et B$(4;-5)$. Donner trois vecteurs directeurs de la droite (AB).

2. Déterminer trois équations cartésiennes de la droite d passant par C$(2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;2)$.

3. Donner une équation cartésienne de la droite d passant par le point D$(5;-1)$ et parallèle à la droite d_1 dont une équation cartésienne est $2x-7y=2$.

4. La droite d est-elle parallèle à la droite d_2 dont l'équation réduite $y = -\frac{2}{7}x+3$.
Si non, calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 19 : Quel est le coefficient directeur d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ avec :

1. $\vec{u}(1;-3)$ **2.** $\vec{u}(-2;4)$ **3.** $\vec{u}(5;-2)$ **4.** $\vec{u}\left(\frac{1}{4};2\right)$

Exercice 20 : Soit d la droite d'équation $2x-3y=-7$.

1. Le point $A(-2;1)$ appartient-il à d ?
2. Même question avec $B\left(\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$ et $C\left(3;\frac{13}{3}\right)$.
3. Trouver l'ordonnée du point $E \in d$ d'abscisse $-\frac{2}{7}$.
4. Trouver l'abscisse du point $F \in d$ d'ordonnée $\frac{1}{5}$.

Exercice 21 : Placer les points $A(-2;4)$, $B(2;2)$, $C(-5;0)$ et le point D tel que $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$.

1. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
   b. Déterminer les coordonnées de D.
2. **a.** Soit $d : 6x+y=14$. Vérifier que B et D appartiennent à d.
   b. Trouver une équation cartésienne de la droite (AC).
   c. Prouver que (BD) et (AC) sont sécantes.
   d. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection E.
3. **a.** Calculer les coordonnées de K milieu de [AB] et de L milieu de [CD].
   b. Démontrer que les points E, K et L sont alignés.

Exercice 22 : Soit m un réel et d la droite d'équation $x+my+3=0$ Peut-on trouver m tel que :

1. $\vec{u}(3;2)$ soit un vecteur directeur de d.
2. $A(-2;3)$ appartienne à d.
3. d soit parallèle à la droite d'équation $3x-y=0$.
4. d soit parallèle à l'axe des abscisses.
5. d soit parallèle à l'axe des ordonnées.
6. d passe par l'origine du repère.
7. d passe par le point $J(0;1)$.

Exercice 23 : Dans un repère du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(3;4)$, $B(1;-1)$ et $C(6;-2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le milieu I de [AC] et parallèle à (AB).
3. Δ est la droite d'équation $-16x+y=-98$
   a. Prouver que Δ et (AB) sont sécantes en D de coordonnées à déterminer.
   b. Montrer que le milieu J de [DC] est un point de d de deux manières différentes.

Exercice 24 : Soit ABCD un trapèze tel que (AB) soit parallèle à (CD).
Soit M le point d'intersection des droites (AD) et (BC).
Soit I le milieu du côté [AB] et J celui du côté [CD].
On nomme K le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].
On veut démontrer que M, I, J et K sont alignés.

1. Justifier que $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère.
2. Donner les coordonnées de A, B, D et I dans ce repère.
3. On nomme a l'abscisse du point C dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. Déterminer, en fonction de a, les coordonnées de C et de J.
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) et en déduire les coordonnées de M.
5. Montrer que les points M, I et J sont alignés.
6. Déterminer une équation cartésienne de (BD) et de (AC). En déduire les coordonnées de K.
7. Conclure.