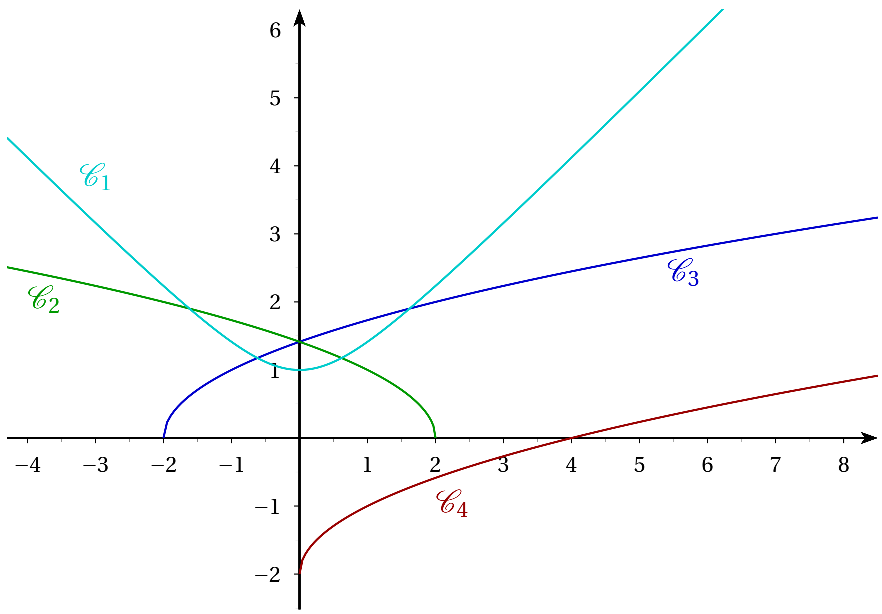
I) Racine carré

Exercice 1 : On a représenté graphiquement dans un repère les fonctions f, g, h et k définies par :

- $f(x) = \sqrt{x+2}$
- $h(x) = \sqrt{x} - 2$
- $g(x) = \sqrt{2-x}$
- $k(x) = \sqrt{x^2+1}$

Associer à chacune de ces fonctions la représentation graphique qui lui correspond, **sans calculatrice**.



Exercice 2 : Déterminer l'ensemble de définition pour la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ **2.** $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ **3.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}}$

Exercice 3 : On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Entrée(s) :
x et y sont des nombres réels.

Entrer x
Si ($x > 1$) **Alors**
  $y := \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$
Sinon
  Afficher « impossible ».
Fin Si
Afficher y

1. Tester cet algorithme pour les valeurs suivantes de x : -1, 0, 1, 2, 3 et 5.

2. Expliquer les réponses obtenues pour les valeurs de -1, 0 et 1 de x.

3. Déterminer l'expression algébrique, donnant y en fonction de x, définie par cet algorithme, ainsi que l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x pour lesquels elle est définie.

4. Démontrer par inégalités successives que la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $x \longmapsto y$ est décroissante.

Exercice 4 : Donner le signe de la fonction Φ définie sur $[0;+\infty[$ par $\Phi(x) = \sqrt{x} - x^2$

Exercice 5 : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{4x+5}$$

1. Déterminer son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.

2. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathscr{D}_f$

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.

  a. Calculer les premiers termes de la suite u.

  b. Démontrer que la suite u est croissante.

4. Soit (v_n) la suite définie par $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 = -1$

  a. Placer sur l'axe des abscisses les premiers de la suite v en s'aidant de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ donné ci-dessous puis conjecturer le sens de variation et la limite de v.

  b. Démontrer que si $v_n < v_{n+1}$ alors $v_{n+1} < v_{n+2}$.

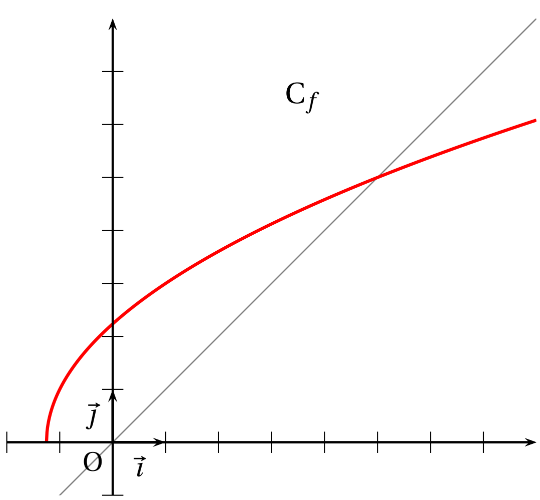
  c. Vérifier que $v_0 < v_1$; en déduire le sens de variation de v.

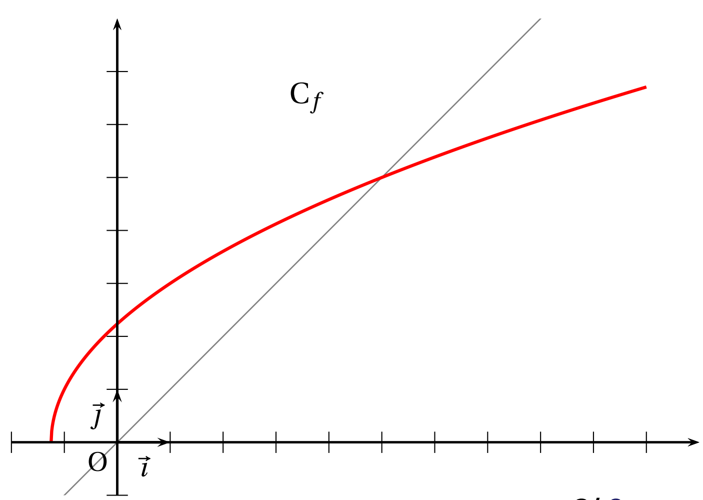
5. Soit (w_n) la suite définie par $w_{n+1} = f(w_n)$ et $w_0 = 10$

  a. Placer sur l'axe des abscisses les premiers de la suite w en s'aidant de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ donné ci-dessous puis conjecturer le sens de variation et la limite de w.

  b. Démontrer que si $w_n > w_{n+1}$ alors $w_{n+1} > w_{n+2}$.

  c. Vérifier que $w_0 > w_1$; en déduire le sens de variation de la suite v.





Exercice 6 :

PARTIE A : **Une fonction auxiliaire**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 4x + 5$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$$
2. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq 0$$
3. Dresser le tableau de variation de g

PARTIE B : **Etude d'une fonction composée**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

1. Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f par inégalités successives

II) Valeurs Absolues

Exercice 7 : Dans chacun des cas suivant, écrire f sans valeur absolue puis faire un schéma de sa représentation graphique :

1. $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ sur $\mathbb{R}^*$
2. $f(x) = x|x|$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 8 : Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :

1. $|x-2| = 3$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
2. $|x+5| = |3-x|$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
3. $\left|\cos x - \dfrac{1}{2}\right| \leq 1$ avec $\mathrm{I} =]-\pi;\pi]$

Exercice 9 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| + |2x-4|$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de x, l'expression de $|x|$, de $|2x-4|$, sans utiliser les valeurs absolues. En déduire l'expression de f en fonction de x, sans valeur absolue.
On pourra présenter les résultats dans un tableau.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 3$.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, d'unité graphique 1 cm.

Exercice 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x| - |2x-2| + 2 - x$

1. Déterminer, suivant les valeurs de x, l'expression de f sans valeur absolue.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) > 4$, puis $f(x) \geq 4$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

III) Tableau de variations et notion de limite

Exercice 11 : En utilisant la méthode « des tableaux de variations successifs », dresser les tableaux de variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

1. $f : x \longmapsto 6 - 2|x|$
2. $f : x \longmapsto |-2x+4|$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{-5}{|3x-4|}$
4. $f : x \longmapsto 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x^2-5}}$
5. $f : x \longmapsto \left(\sqrt{-2x+4}\right)^2$
6. $f : x \longmapsto \sqrt{(-2x+4)^2}$

Exercice 12 : Soit u une fonction polynôme de degré 2 de forme développé $u(x) = ax^2 + bx + c$.
On donne son tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$	1	4	$\cdots$	$+\infty$
Variations de u	↗	0	18	0	↘

1. Déterminer la seconde racine de u.
2. Déterminer a.
3. En déduire la forme factorisée de u, puis sa forme canonique et enfin sa forme développée.
4. Etablir les tableaux de variations des fonctions $g = \sqrt{u}$, $h = \dfrac{1}{u}$ et $k = |u|$ sur le plus grand ensemble possible.

Exercice 13 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-5x+5}{x-3}$
On souhaite étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f par rapport à la droite d d'équation $y = x-2$.

1. Montrer que $f(x) - (x-2) = -\dfrac{1}{x-3}$.
2. Etudier le signe de $-\dfrac{1}{x-3}$.
3. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite d.
4. Conjecturer la façon dont évolue la valeur de $f(x) - (x-2)$ lorsque x devient grand [a]
   Interpréter géométriquement ce phénomène.

Exercice 14 : Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$

1. « g est la somme de fonctions monotones sur l'intervalle $[0;+\infty[$, elle est donc monotone sur cet intervalle. »
   Que penser de cette affirmation ?
2. Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[,\quad g(x) = \left(\sqrt{x}-2\right)^2$
3. En déduire les variations de la fonction g sur son ensemble de définition.

(a). On pourra faire les calculs pour $x = 10^2$, $x = 10^3$ et $x = 10^6$. Noter que ceci ne constitue absolumment pas une démonstration !

4. La fonction g admet-elle un minimum ? Si oui lequel ?
5. a. Traduire en langage courant la proposition :

$$\forall \mathrm{M} \geq 0, \exists x_0 \in [0;+\infty[, \forall x \geq x_0 \text{ on a } g(x) \geq \mathrm{M}$$

   b. Démontrer cette proposition. [(b)]
   c. Quelle nouvelle information, relative au tableau de variations de la fonction f, cette proposition apporte-t-elle ?

IV) Valeurs Absolues : Applications aux limites de suites

Exercice 15 : On considère les suites u, v et w définies par :

$$u_n = 1+\frac{2}{n} \quad ; \quad v_n = \frac{7}{n}-3 \quad \text{et} \quad w_n = \frac{5}{n+1}$$

1. Donner, sans justification :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} w_n$$

2. Soit ϵ un nombre réel strictement positif, on considère les équations (E), (F) et (G) suivantes :

$$(\mathrm{E}) : |u_n - 1| \leq \epsilon \quad ; \quad (\mathrm{F}) : |v_n+3| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad (\mathrm{G}) : |w_n| \leq \epsilon$$

   a. Résoudre les équations (E), (F) et (G) pour $\epsilon = 0,1$ et $\epsilon = 10^{-3}$
   b. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 2 :

Entrée(s) :
$u \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$u := 3$
$n := 1$
Tant que ($|u-1| > \epsilon$) **Faire**
  $n := n+1$
  $u := 1+\frac{2}{n}$
Fin Tant que
Afficher n

Algorithme 3 :

Entrée(s) :
$v \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$uv = 4$
$n := 1$
Tant que ($|v+3| > \epsilon$) **Faire**
  $n := n+1$
  $v := \frac{7}{n}-3$
Fin Tant que
Afficher n

Qu'affiche ces deux algorithmes lorsque l'utilisateur entre $\epsilon = 0,1$ puis lorsqu'il entre $\epsilon = 10^{-3}$?

(b). Autrement dit, pour un M quelconque fixé, trouver une valeur de x_0 (en fonction de M) qui convienne

c. Ecrire un algorithme permettant d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $|w_n| \leq \epsilon$

d. Résoudre l'équation (E). Qu'a-t-on démontré ?

e. De la même manière résoudre les équations (F) et (G) et préciser les résultats ainsi démontrés