Exercices
De la suite dans les idées

I) Définir une suite - Algorithme

Exercice 1 : Pour les suites suivantes, calculer les termes de u_1 à u_5 puis conjecturer une formule explicite du terme général. Retrouver alors u_0 à partir de la formule conjecturée.

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$

Exercice 2 : On donne :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \quad ; \quad u_2 = 7 \quad ; \quad u_3 = 15 \quad ; \quad u_4 = 31 \quad ; \quad u_5 = 63 \quad ; \quad u_6 = 127$$

1. Donner u_7.
2. Proposer une formule donnant u_{n+1} en fonction de u_n. Vérifier qu'elle est correcte sur les premiers termes.
3. Proposer une formule donnant u_n en fonction de n. Vérifier qu'elle est correcte sur les premiers termes.

Exercice 3 : On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : *Suite* (v_n)

Entrée(s) :
n un entier naturel
Variable(s) :
v est un nombre réel.
Début
 v prend la valeur $\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$
 Renvoyer v.
Fin

1. Si l'utilisateur rentre l'entier $n = 5$, que renvoit l'algorithme ?
2. Que fait cet algorithme ?
3. Compléter :

$$\begin{cases} v_{12n} = \ldots\ldots \\ v_{12n+1} = \ldots\ldots \\ v_{12n+2} = \ldots\ldots \\ v_{12n+3} = \ldots\ldots \end{cases}$$

Exercice 4 : On considère les suites (w_n) et (s_n) définies par les algorithmes suivants :

Algorithme 2 : *Suite* (w_n)

Entrée(s) :
n est un entier naturel.
Variable(s) :
w est un nombre réel.
i est un nombre entier naturel.
Début
 w reçoit la valeur $4 \times (-2)^n + 1$
 Renvoyer w.
Fin

PARTIE A : **La suite w**

1. Si l'utilisateur choisit l'entier $n = 5$, que renvoit l'algorithme 2 ?
2. Proposer une définition pour la suite (w_n).
3. Modifier l'algorithme pour que, lorsqu'on entre un entier n, il renvoit la liste des termes de la suite (w_n) jusqu'à w_n.

Algorithme 3 : *Suite* (s_n)

Entrée(s) :
n est un entier naturel ($n \geq 3$).
Variable(s) :
s est un nombre réel.
i est un nombre entier naturel.
Début
  $s := -1$
  Pour i allant de 3 à n **Faire**
    $s := \sqrt{\frac{1+s}{2}}$
    Renvoyer s
  Fin Pour
Fin

PARTIE B : **La suite** s

1. **a.** Compléter la trace d'exécution de cet algorithme dans le tableau ci-dessous, avec l'entrée $n = 5$.

i						
s						

   b. Que renvoit dans ce cas l'algorithme 3 ?
2. Proposer une définition par récurrence de la suite (s_n).
3. Modifier l'algorithme pour qu'il n'affiche que le terme de rang n de la suite (s_n).

Exercice 5 :
On considère l'algorithme ci-contre.

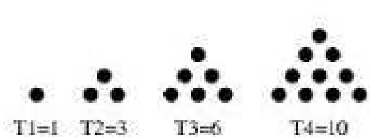
1. Compléter la trace d'exécution de cet algorithme dans le tableau ci-dessous, avec l'entrée $n = 5$.

Test								
u	-4							
i	0							

2. Que renvoit l'algorithme si on entre la valeur 0 pour n ?
3. Soit n un entier naturel et u_n la valeur renvoyée par l'algorithme avec l'entrée n.
   a. Quel est le rang initial de la suite (u_n) ?
   b. Quelle relation existe-t-il entre u_{n+1} et u_n ?
4. Modifier cet algorithme pour que, lorsqu'on entre un entier n, il renvoit la somme des termes de la suite (u_n) jusqu'au terme de rang n.

Algorithme 4 :

Entrée(s) :
n un entier naturel
Variable(s) :
u est un nombre réel.
i est un entier naturel.
Début
  $u \longleftarrow -4$
  $i \longleftarrow 0$
  Tant que $(i < n)$ **Faire**
    $u \longleftarrow \frac{3}{2}u + 1$
    $i \longleftarrow i + 1$
  Fin Tant que
  Renvoyer u
Fin



Exercice 6 : Voici les 4 premiers nombres triangulaires :

1. Représenter et donner les valeurs de T_5 et T_6.
2. Définir la suite T puis proposer un algorithme permettant de calculer un nombre triangulaire quelconque T_n.
3. A l'aide d'un programme donner T_{12} et T_{60}.
4. Ecrire et programmer un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

   a. $T_n \geq 100$ **b.** $T_n \geq 1000$

Exercice 7 :

1. Compléter la trace d'exécution de cet algorithme dans le tableau ci-dessous, avec l'entrée $n = 5$.

i						
c						
a	1					
b	2					

2. Si l'utilisateur choisit l'entier $n = 7$, que renvoit l'algorithme ?
3. On considère la suite (u_n) définie par l'algorithme ci-contre. Donner une définition par récurrence de la suite (u_n).
4. Proposer une définition explicite de u_n en fonction de n.
5. Modifier alors l'algorithme pour qu'il ne calcule et ne renvoit que le terme de rang n de la suite (u_n).

Algorithme 5 :

Entrée(s) :
n un entier naturel ($n \geq 2$).
Variable(s) :
a, b et c sont des nombres réels.
i est un nombre entier.
Début
  $a := 1$
  $b := 2$
  Pour i allant de 2 à n **Faire**
    $c := 5b - 6a$
    $a := b$
    $b := c$
    Renvoyer c.
  Fin Pour
Fin

Exercice 8 : On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de la façon suivante :

$$u_0 = 2 \qquad u_1 = 1 + \frac{1}{2} \qquad u_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \qquad u_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} \qquad \text{et ainsi de suite.}$$

1. Exprimer sous la forme de fraction irréductible les termes u_1, u_2 et u_3.
2. Donner une définition par récurrence de la suite u.
3. Ecrire un algorithme permettant de calculer u_n en fonction de n puis à l'aide de votre programme donner u_5, u_{10}, u_{20} et u_{50} à 10^{-4} près.
4. Conjecturer la limite de la suite u.

Exercice 9 : La suite u est définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2 - 3n$

II) Représentation graphique

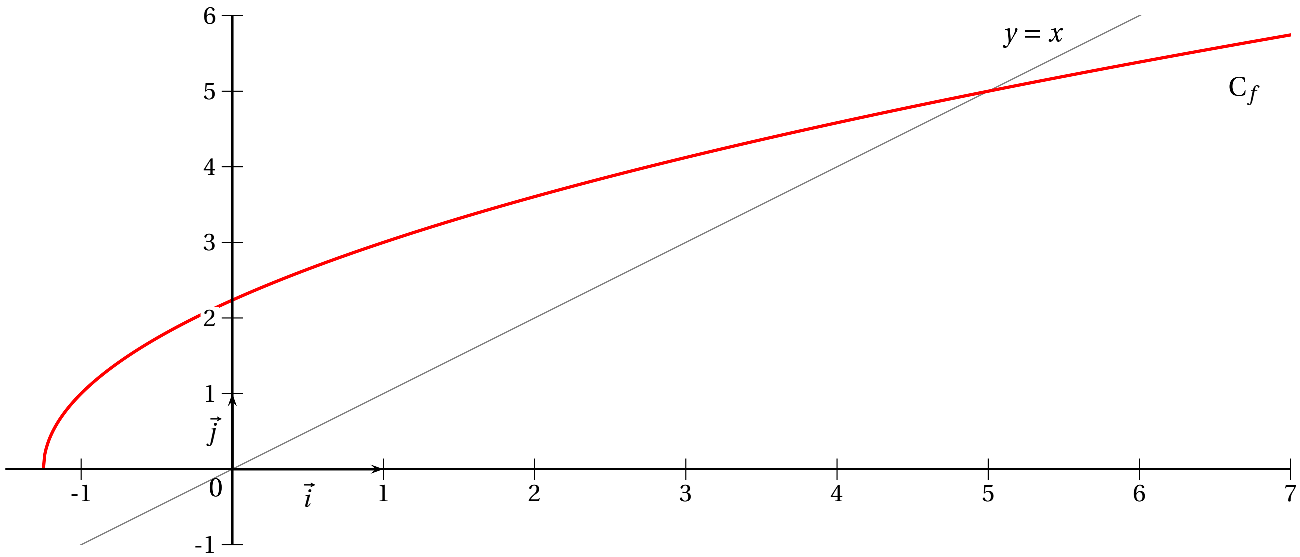
Exercice 10 : On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$

1. Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Dans le repère ci-dessous on a tracé la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

a. Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u.
Vérifier votre construction en calculant ces premiers termes.

b. Conjecturer le sens de variation de la fonction u.

c. Conjecturer la valeur limite ℓ de la suite u.



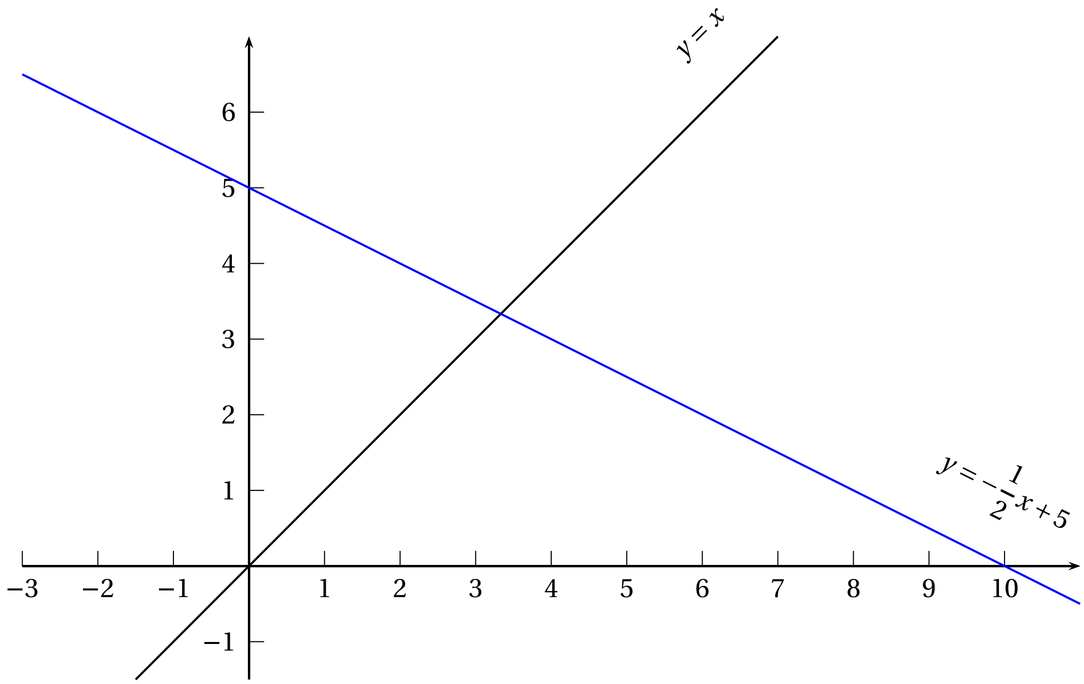
Exercice 11 : On considère la suite u définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. A la calculatrice, en utilisant la représentation graphique de la fonction f, placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u pour $a = 0$. Dans ce cas conjecturer le sens de variation de la suite u.
3. A la calculatrice, en utilisant la représentation graphique de la fonction f, placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u pour $a = 15$. Dans ce cas conjecturer le sens de variation de la suite u.
4. Que constate-t-on ?

Exercice 12 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 5$.

1. Sur la figure ci-dessous, sont tracées, dans un repère orthonormal, les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Construire sur l'axe des abscisses les termes u_2, u_3 et u_4.
2. Vérifier votre construction en calculant u_2, u_3 et u_4.
3. Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?



III) Sens de variation

Exercice 13 : Etudier le sens de variation de la suite u dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = 3 - 2n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_n = -2 + 5n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 :

1. La suite u est définie pour tout $n \geq 1$ par :
$$u_n = 1 + \frac{10}{n}$$
En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite u est décroissante à partir de $n \geq 1$.
2. Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - n^2$ est décroissante à partir d'un certain rang à préciser.
3. Montrer que la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2 - 10n + 16$ est croissante à partir d'un certain rang à préciser.
4. La suite u est définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 3n + 1$.
   a. Montrer que la suite u est croissante à partir d'un certain rang à préciser en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   b. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ et retrouver le résultat précédent.
5. La suite u est définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - n$.
Montrer que la suite u est croissante.

IV) Limite

Exercice 15 : Conjecturer le sens de variation et la limite éventuelle des suites explicites suivantes

1. La suite u est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_n = -7 + 2n$$
2. La suite v est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$v_n = 3 - \frac{1}{n}$$
3. La suite w est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$w_n = (-1)^n + n$$
4. La suite t est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$t_n = 5 + \frac{2}{n+1}$$
5. La suite a est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$a_n = n - \frac{10}{n+1}$$
6. La suite b est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$b_n = (-1)^n \times n$$
7. La suite c est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$c_n = \frac{(-1)^n}{n}$$
8. La suite p est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$p_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Exercice 16 : Proposer un exemple de suite u telle que :

1. u est décroissante et converge vers 1.
2. u n'admet pas de limite.
3. u diverge vers $-\infty$.
4. u est croissante et converge vers π.

Exercice 17 : Une suite u est décroissante et converge vers 0.
La suite v est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < u_n$.
Dans chaque cas, indiquer la (les) bonne(s) réponse(s) :

1. Si la suite v a tous ces termes positifs alors :

   a. La suite v est décroissante. **b.** La suite v est convergente. **c.** La suite v a une limite $\ell < 0$.

2. Si La suite v est croissante alors :

   a. la suite v a tous ses termes négatifs ou nuls. **b.** la suite v est convergente. **c.** la suite v converge vers 0.

Exercice 18 : On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = -1 + \dfrac{1}{n}$

1. Conjecturer la limite ℓ de la suite u.
2. On donne l'algorithme ci-contre.
   - **a.** Compléter la trace d'exécution de cet algorithme dans le tableau ci-dessous, avec l'entrée $\varepsilon = 0.3$.

Test						
u						
p						

   - **b.** Que renvoit l'algorithme dans ce cas ? Interpréter.
3. Que renvoit l'algorithme pour $\varepsilon = 0,1$? $\varepsilon = 10^{-3}$?
4. Déterminer un entier p tel que $\forall n \geq p$, on ait :

$$-1 - \varepsilon \leq u_n \leq -1 + \varepsilon$$

5. Que vient-on de démontrer ?

Algorithme 6 :

Entrée(s) :
ε est un nombre réel strictement positif.
Variable(s) :
u est un nombre réel.
p est un nombre entier naturel.
Début
$u := 0$ et $p := 1$
Tant que ($u \notin]-1-\varepsilon ; -1+\varepsilon[$) **Faire**
$u := -1 + \dfrac{1}{p}$
$p := p + 1$
Fin Tant que
Renvoyer $p - 1$.
Fin

Exercice 19 : On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 3$

1. Conjecturer la limite ℓ de la suite u.
2. On donne l'algorithme suivant :

Algorithme 7 :

Entrée(s) :
A est un nombre réel strictement positif.
Variable(s) :
u est un nombre réel.
p est un nombre entier naturel.
Début
$u := -3$ et $p := 0$
Tant que ($u < \mathrm{A}$) **Faire**
$u := p^2 - 3$
$p := p + 1$
Fin Tant que
Afficher $p - 1$.
Fin

   - **a.** Qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre $\mathrm{A} = 30$? $\mathrm{A} = 1000$? $\mathrm{A} = 10^6$?
   - **b.** Déterminer un entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, on ait :

$$u_n > \mathrm{A}$$

   - **c.** Que vient-on de démontrer ?

Exercice 20 : On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - 3n$.
Rédiger un énoncé d'exercice sur le modèle des deux précédents, puis répondre à chacune des questions.

V) Un exemple de devoir

Exercice 21 :

Algorithme 8 :

Entrée(s) :
n est un nombre entier naturel.
Variable(s) :
u est un nombre réel.
i est un entier naturel.
Début
  $u := 5$
  Pour i allant de 1 à n **Faire**
    $u := \frac{2}{3}u + 1$
    Afficher u
  Fin Pour
Fin

1. On considère la suite u définie par l'algorithme ci-contre.
   a. Qu'affiche l'algorithme si l'utilisateur entre $n = 4$?
   b. Que fait cet algorithme ?
2. On considère la suite u définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$$
   a. Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   b. Dans un repère à l'aide de la représentation graphique de la fonction f et la droite $\mathscr{D} : y = x$ (que l'on tracera), placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u.
   c. Conjecturer le sens de variation de la suite u et sa limite ℓ.
3. **On admet que** la suite u peut se définir pour tout entier naturel n par :
$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$$
   a. Vérifier cette formule en calculant u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$
   c. En déduire le sens de variation de la suite u.

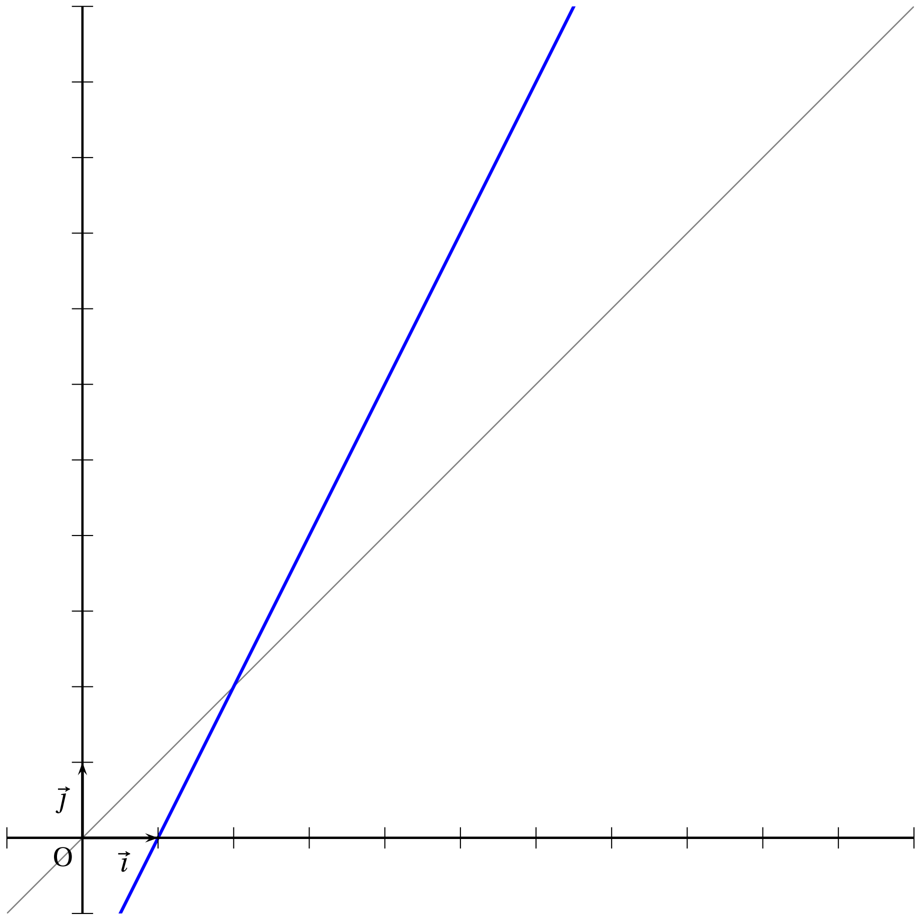
Exercice 22 : Lors d'une soirée de ski nocturne, Augustin apprend à prendre le téléski en snowboard.
La première fois, il parcourt 40 mètres.
Puis, à chaque tentative, il réussit à tenir sur la perche 5 mètres de plus que la fois précédente.
Le téléski mesure 300 mètres de long.

1. Combien devra-t-il faire de tentatives pour arriver au sommet ?
2. Le téléski avance à la vitesse de 4 mètres par seconde.
   Combien de temps Augustin aura-t-il passé sur le téléski ?

Exercice 23 : On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 2 \end{cases}$$

1. A l'aide des droites $\mathscr{D} : y = x$ et $\mathscr{D}' : y = 2x - 2$ donnée ci-dessous, placer sur l'axe des abscisses les termes de u_0 à u_3.



2. Conjecturer la limite de la suite u.

3. Calculer les 4 premiers termes de la suite u.

4. On donne l'algorithme ci-contre.

- **a.** Que fait-il ?
- **b.** Pourquoi est-on sûr qu'il s'arrête ?
- **c.** Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur entre A = 30 ?
- **d.** Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur entre A = 100 ? s'il entre A = 10000 ?

Algorithme 9 :

Entrée(s) :
A est un nombre réel strictement positif.
Variable(s) :
u est un nombre réel.
p est un nombre entier naturel.
Début
  $u := 3$ et $p := 0$
  Tant que ($u < \mathrm{A}$) **Faire**
    $u := 2u - 2$ et $p := p + 1$
  Fin Tant que
  Afficher p.
Fin