

EXERCICES TOUJOURS À LA DÉRIVE ...

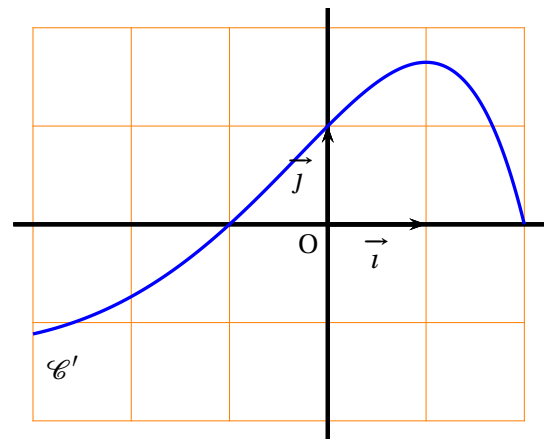
Exercice 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ sur \mathbb{R}

- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
On dit que f est une fonction **impaire**.
- On donne $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - Dresser le tableau de signe de la fonction f' .
 - En déduire le tableau de variation de la fonction f .
 - Préciser les extrema locaux de f .
- Tracer la représentation graphique de la fonction f à la calculatrice sur l'intervalle $[-4; 4]$ et vérifier graphiquement vos résultats.
- Quelle symétrie présente cette courbe ?
Les courbes représentatives de fonctions impaires sont symétriques par rapport à ...

Exercice 2 : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3; 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative \mathcal{C}' ci-contre.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fautive et justifier la réponse.

- Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leq 0$.
- La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1; 2]$.
- Pour tout réel x de l'intervalle $[-3; 2]$, $f(x) \geq -1$.
- Soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f .
La tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1; 0)$.

Exercice 3 : Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition, calculer leur fonction dérivée, puis dresser leur tableau de variations :

$$f : x \mapsto \frac{5x^2}{3} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}$$

$$f : x \mapsto x^2\sqrt{2} - x\sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$f : x \mapsto -x^3 + 5x^2 - 2$$

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} + 4x$$

$$f : x \mapsto \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}x$$

$$f : x \mapsto \frac{-x+2}{2x+5}$$

Exercice 4 : Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition et calculer leur fonction dérivée :

$$f : x \mapsto (2x+3)\sqrt{x}$$

$$f : x \mapsto (3\sqrt{x}+1)^4$$


$$f : x \mapsto (5x^4 + 2x^3 - 4x + 1) \times \frac{1}{x}$$

$$f : x \mapsto \frac{1}{9} - \frac{1}{x^3}$$

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 5x - 2}{x^7 - 4}$$

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - x + 7}{5}$$

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{2x+5}$$

 **Exercice 5** : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ et \mathcal{C}_f sa représentation graphique.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

3. En déduire le tableau de variations de f .
4. Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.


 **Exercice 6** :

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ par $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2$


- a. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
- b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x + 4}$.

- a. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ et calculer sa dérivée.
- b. En utilisant les questions précédentes, établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$

 **Exercice 7** : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. On note \mathcal{C}_f sa représentation graphique.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Soit A le point d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe \mathcal{C}_f en A
3. Soit B le point d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe \mathcal{C}_f en B
4. Vérifier graphiquement vos résultats en traçant \mathcal{C}_f , T_A et T_B à la calculatrice.

 **Exercice 8** : On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$. On note \mathcal{C}_f sa représentation graphique.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
3. Tracer T et \mathcal{C}_f sur votre calculatrice.
4. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;3]$.
5. Donner une valeur approchée de α , par défaut, à 10^{-1} près.

 **Exercice 9** : Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{2005} - 1}{h}$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1+x)^{2005}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f . Puis calculer $f'(0)$.
2. Calculer le taux de variation de la fonction f entre 0 et h .
3. Conclure.