EXERCICES
LES LIMITES

Exercice 1.

1. Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + 5$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x+1}{x+1}}$ et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{\dfrac{2^{n+2}+1}{2^n+1}}$
   Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et démontrer que la suite (v_n) est convergente, préciser sa limite.

Exercice 2. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ dont on donne le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dresser, en justifiant, les tableaux de variations des fonctions $-f$, $|f|$, f^2 et $\dfrac{1}{f}$, en précisant les limites aux bornes de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1-3x}{x^2+x}$

1. A l'aide de votre calculatrice, conjecturer la limite de f en 0, et en $+\infty$, ainsi que ses variations.
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   En donner une interprétation graphique.
3. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
   (c) En déduire le tableau complet des variations de f.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} - x$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x on a $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$
   En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 5. Soit f une fonction décroissante sur $]0;+\infty[$ telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $f(x) \geq 0$

Exercice 6. Soit $f(x) = \dfrac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

1. Démontrer que, si $x > 0$ alors $-\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{1+\sqrt{x}}$
2. En déduire que f admet une limite en $+\infty$ dont on précisera la valeur.