I. Exercices d'applications

Exercice 1.
On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

où $a \in [-1;+\infty[$.
A l'aide d'un raisonnement par récurrence, étudier la monotonie de la suite (u_n) [1]

Exercice 2. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

1. $u_n = n^2+4n+3$
2. $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$
3. $u_n = \dfrac{1-n^2}{n+2}$
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n+1}$

Exercice 3.

1. Soit (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par
$$u_n = \frac{-2n^2+1}{n^2+4}$$
Démontrer que cette suite est bornée.
2. Soit (v_n) définie par
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 2\sqrt{v_n}+1 \end{cases}$$
Démontrer que (v_n) est bornée par 0 et 9

Exercice 4.
Démontrer que chacune des suites (u_n) est minorée mais non bornée :

1. $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{n^2+\cos n}{n+1}$

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, on définit la suite (u_n) pour $n \geq 1$; préciser si cette suite est bornée :

1. (a) $u_n = n^2+n-2$ (b) $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$ (c) $u_n = \dfrac{1}{n}$
2. (a) $u_n = \dfrac{3-\sin n}{2}$ (b) $u_n = \dfrac{2+\sin^2 n}{4}$ (c) $u_n = n+(-1)^n$ (d) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ (e) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (f) $u_n = -\dfrac{5}{3^n}$

Exercice 6. La suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n+3}{u_n+6} \end{cases}$$

1. On comparera les valeurs u_0 et u_1 suivant les valeurs de a.

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$ on a : $1 < u_n < 3$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Quelle est la limite de (v_n) ?
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n. En déduire le comportement à l'infini de u_n

Exercice 7. On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3} \qquad \text{et} \qquad v_n = -(n+1)^2$$

1. (a) Montrer que la suite u converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
   (b) On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: u est un nombre réel.
n est un entier naturel.
$n = 0$ et $u = \frac{1}{3}$.
Tant que $(|u-2| \geq 0,001)$ **Faire**
  $n := n+1$ et $u := \frac{2n+1}{n+3}$
Fin Tant que
Afficher n

   Quel est l'intérêt de cet algorithme ?
   (c) A partir de quel rang N la distance entre u_n et ℓ est-elle strictement inférieure à $0,001$?
2. (a) Déterminer la limite de la suite v.
   (b) Ecrire un algorithme (on pourra modifier le précédent) qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $v_n < -10^{10}$.

Exercice 8. Déterminer la limite des suites u, v et w définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad ; \qquad v_n = \frac{n + \cos n}{n+3} \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n+5}$$

Exercice 9. On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{5}{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_n = n^2 + n$$

1. (a) Montrer que la suite u converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
   (b) Compléter l'algorithme suivant de manière à ce qu'il affiche le plus petit entier naturel n tel que la distance entre u_n et ℓ soit inférieure à 10^{-5} :

Algorithme 2 :

Données: u est un nombre réel.
n est un entier naturel.
$n = 0$ et $u = \dots$.
Tant que $(\dots\dots\dots)$ **Faire**
  $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots\dots$
Fin Tant que
Afficher …

2. (a) Déterminer la limite de la suite v.
   (b) Ecrire un algorithme (on pourra modifier le précédent) qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $v_n > 10^{10}$.

Exercice 10. *Etude d'une suite arithmético-géométrique*

1. Chaque année, la grand mère de Julien a déposé de l'argent dans une tirelire afin de constituer une cagnotte pour son petit fils.
   Elle a commencé le 1^{er} janvier 1982 par un dépot de 500 F. Depuis lors, elle a effectué un dépot chaque 1^{er} janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépot de 50 F.
   On note :
   - u_n, le montant exprimé en francs, de la somme déposé dans la tirelire le 1^{er} janvier de l'année $1982+n$ (Ainsi : $u_0 = 500$, $u_1 = 550$, …)
   - s_n le montant exprimé en francs, de la somme déposé dans la tirelire après le dépot de l'année $1982+n$ (Ainsi : $s_0 = 500$, $s_1 = 1050$, …)

   (a) Calculer u_2, puis exprimer u_n en fonction de n
   (b) Calculer s_2, puis exprimer s_n en fonction de n
   (c) Le 1^{er} janvier 2002, la grand-mère de Julien effectué son dépôt habituel (en francs) puis offre la tirelire à Julien. Quel est le montant de la somme reçue par Julien en francs, puis en euros [2]

2. Avec le cadeau de sa grand-mère, Julien décide d'ouvrir un compte bancaire et décide d'y placer la plus grande partie de la somme reçue.
   Le 1^{er} janvier 2002, il effectue un placement de 3000€ au taux annuel de 4%.
   De plus chaque 1^{er} janvier des années suivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200€, on note :
   - c_n le montant exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Julien après n années de placement. (Ainsi $c_0 = 3000$)
   - (u_n) la suite définie par $u_n = c_n + 5000$. (Ainsi $u_0 = 8000$).

   (a) Justifier que, pour tout entier naturel n on a $c_{n+1} = 1,04c_n + 200$.
   (b) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (c) Exprimer u_n en fonction de n, puis c_n en fonction de n.
   (d) Combien d'années, au minimum, Julien devra-t-il attendre pour disposer d'une somme de 6000€ sur son compte bancaire ?

2. Rappel : 1 euro correspond à $6,55957$ francs

II. Un exemple de devoir

<u>Exercice</u> 11. Opérations sur les limites et FI (4 points)

Déterminer en rédigeant convenablement les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^4-3n^3+0.9^n$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^3+27n^2+7}{0.1n^5-4}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 6-\dfrac{7}{0.9^n}$

<u>Exercice</u> 12. Limites et comparaison (5 points)

1. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{5n^2-3\cos(n)}{2n^2+n+1}$.
   (a) Calculer u_{100} puis u_{1000} à 10^{-4} près *(on réglera la calculatrice en radians)*.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de (u_n) ?
   (b) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
2. (a) On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=n^2+\sin(n)$.
   Déterminer la limite de la suite v.
   (b) A partir de quel rang est-on certain que $v_n\geq 10^6$?
3. On considère la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n=n\left((-1)^n-2\right)$.
   Déterminer la limite de la suite w.

<u>Exercice</u> 13. Utilisation d'une suite auxiliaire (4 points)

On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=13 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+\dfrac{4}{5}\end{cases}$

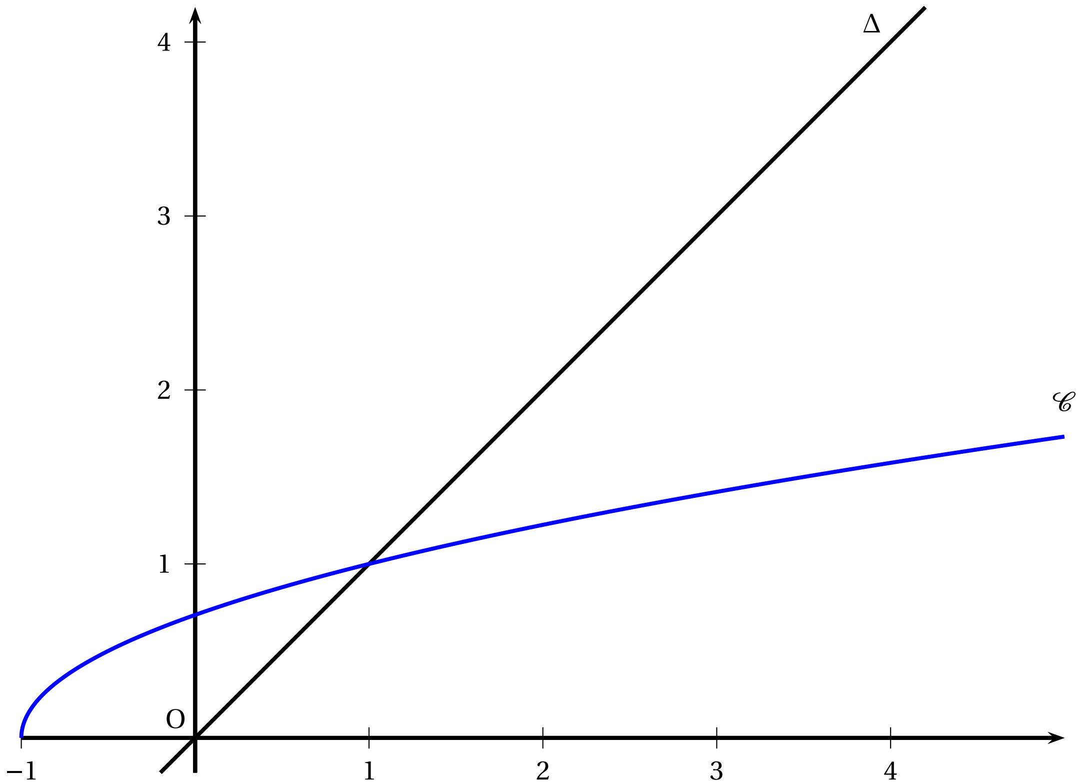
Et la suite (S_n) sur $\mathbb{N}$ par : $\mathrm{S}_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k-n-1=u_0+u_1+\cdots+u_n-n-1$

1. (a) Montrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-1$ est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et son éventuelle limite.
2. (a) Montrer que $\mathrm{S}_n=15\left(1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$.
   (b) Déterminer la limite ℓ de la suite S.

Exercice 14. Suite récurrente (5 points)

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$, alors on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1. (a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
4. En constatant que $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \iff (u_{n+1})^2 = \dfrac{1+u_n}{2}$ car $u_{n+1} \geq 0$ et en utilisant les règles d'opérations sur les limites, déterminer ℓ.

Exercice 15. Récurrence (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$

Et la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \dfrac{2^{n+1} - 2n - 3}{2^n}$