∽ EXERCICES ∽
LE LOGARITHME NÉPÉRIEN

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions :

   (a) $f : x \longmapsto \ln(1-3x)$

   (b) $f : x \longmapsto \ln(x+1)+\ln(x-1)$

   (c) $f : x \longmapsto \ln(x^2+1)$

   (d) $f : x \longmapsto \ln(1-e^x)$

2. Exprimer, en fonction de $\ln 2$ seulement, les nombres :

   (a) $\ln 32$ (b) $\ln 4096$ (c) $\ln\left(\frac{1}{8}\right)$ (d) $\ln 0,0625$

3. Exprimer, en fonction de $a = \ln 2$ et $b = \ln 5$, les nombres :

   (a) $\ln \frac{8}{25}$

   (b) $\ln 625$

   (c) $\ln(10^6)$

   (d) $\ln 0,08$

   (e) $\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \cdots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$

4. Simplifier les expressions suivantes :

   (a) $\ln e^5$

   (b) $\ln \sqrt{e} + \ln \frac{1}{e}$

   (c) $e^{\ln(3+\sqrt{2})}$

   (d) $\ln(e^3\sqrt{e})$

5. Démontrer que les fonctions suivantes sont impaires :

   (a) f est définie sur $]-3;3[$ par
   $$f(x) = \ln \frac{3-x}{3+x}$$

   (b) g est définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}$$

Exercice 2. *Datation au carbone* 14

Les archéologues et les paléontologues datent les objets découverts contenant du carbone (restes d'êtres vivants : os, fossiles, ...) en mesurant la proportion de l'un de ses isotopes, le carbone 14, encore présent dans l'objet.
En effet, à la mort d'un être vivant, le carbone 14 présent dans son organisme se désintègre au fil des années, de sorte que, si p est la proportion de C_{14} restante au bout de N années, alors $N = -8310 \ln p$

1. Le squelette d'un « Homme de Cro-Magnon »contient 5% du carbone 14 initial. Quel âge-a-t-il ?
2. Lucy est la forme la plus ancienne d'Hominidé connu ; les spécialiste lui donnent 4,4 millions d'années.
   A-t-on pu raisonnablement dater les fragments trouvés à l'aide du carbone 14 ?
3. Découverte dans un glacier en 1991, la momie Hibernatus contenait 52,8% (à 1% près) du carbone 14 initial. Donner un encadrement de l'âge d'Hibernatus.

Exercice 3. *Radioactivité*

La loi d'évolution d'un corps radioactif est donnée par la formule $N_1 = N_0 e^{-at}$, a étant une constante positive et N_t le nombre d'atomes contenus dans un échantillon de ce corps au temps t.

1. Représenter graphiquement la fonction $t \longmapsto N_t$
2. On désigne par T le temps au bout duquel $N_T = \frac{1}{2}N_0$.
   Exprimer a en fonction de T. Comparer N_{t+T} à N_t. T est appelé « demi-vie »ou « période »du corps radioactif.

3. Au bout de combien de temps 1 g de radium perdra-t-il une masse de 1 mg (la période du radium étant de 1622 ans) ?
   (La masse est proportionnelle au nombre d'atomes.)

Exercice 4. Résoudre l'équation, l'inéquation ou le système proposé, après avoir déterminé l'ensemble de définition des expressions en présence.

1. $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$
2. $\ln(x^2+4x+3)=\ln(x+7)$
3. $\ln x=3$
4. $\ln(3x-1)=5$
5. $\ln x+\ln(x-7)=\ln 2$
6. $$\begin{cases} e^x-2e^y=-5 \\ 3e^x+e^y=13 \end{cases}$$
   (Poser $\text{X}=e^x$ et $\text{Y}=e^y$).

Exercice 5. Déterminer le plus petit entier n vérifiant :

1. $1,0001^n>10^{100}$
2. $0,999^n<10^{-100}$

Exercice 6. Calculer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$.

1. $x\longmapsto\sqrt{1+\ln^2 x}$
2. $x\longmapsto\dfrac{\ln x}{x^2}$
3. $x\longmapsto x-\ln x$
4. $x\longmapsto\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
5. $x\longmapsto\sqrt{x}\ln x$
6. $x\longmapsto x\ln\sqrt{x}$

Exercice 7. Préciser sur quel intervalle (ou réunion d'intervalles) la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

1. $f(x)=\ln(3x+2)$
2. $f(x)=\ln(x^2-1)$
3. $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$
4. $f(x)=\ln(\ln x)$
5. $f(x)=x\ln x-x$
6. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice 8. On considère la fonction $f:x\longmapsto\dfrac{1}{2}x+2+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier les limites aux bornes de cet ensemble (quatre calculs).
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ et $-\infty$ une asymptote oblique Δ et préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
4. Construire $\mathscr{C}_f$ et Δ (unité : 1 cm).
5. Montrer que le point $\Omega(0;2)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 9. On pose, pour $x>0$ et α réel,

$$f_\alpha(x)=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$$

1. Que dire de $f_\alpha(x)$ lorsque $\alpha=0$? lorsque $\alpha=1$?
   Dans la suite, on suppose que $\alpha\notin\{0;1\}$
2. Etudier les limites de f_α en 0 et en $+\infty$, en distinguant les deux cas :

(a) $\alpha > 0$ (b) $\alpha < 0$

3. On suppose que $\alpha < 0$.
   Dresser le tableau de variations de f_α et tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}_\alpha$ dans les cas :
$$\alpha = -2 \qquad \alpha = -1 \qquad \alpha = -0,5 \qquad \alpha = -0,1$$
4. On suppose que $\alpha > 0$
   (a) On prolonge f_α en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$.
   Montrer qu'ainsi f_α est continue en 0.
   (b) Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction ainsi prolongée (distinguer les cas $\alpha > 1$ et $0 < \alpha < 1$).
   (c) Etudier
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x}$$
   en distinguant deux cas. Interpréter les résultats.
   (d) Tracer les courbes $\mathscr{C}_{0,2}$, $\mathscr{C}_{0,5}$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_{4,5}$ sur le même graphique.

Exercice 10. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$$
On note Γ sa représentation graphique dans un repère orthonormal (Oâ£ć$\vec{u}$, $\vec{v}$), unité graphique : 2 cm.

1. **Etude d'une fonction auxiliaire.**
   On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$g(x) = -2\ln x - xe + 1$$
   (a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
   (b) Etudier le sens de variation de g.
   (c) Montrer que, dans $[0,5;1]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée α.
   Déterminer un encadrement de α à $0,1$ près.
   (d) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. **Etude de la fonction f**
   (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$
   puis étudier le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.
   (c) Montrer que
$$f(\alpha) = \frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$$
   (d) Donner le tableau de variations de f.
   (e) Construire Γ

Exercice 11. *Un truc de banquier*
Les banquiers calculent mentalement le temps approximatif de doublement d'un capital, placé à intérêts composés, de la faà§on suivante ; « Si t est le taux d'intérêt (en %), le capital double au bout de $\frac{70}{t}$ années. »
On rappelle qu'au bout de n années de placement au taux t, la valeur d'un capital est multipliée par :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^n$$

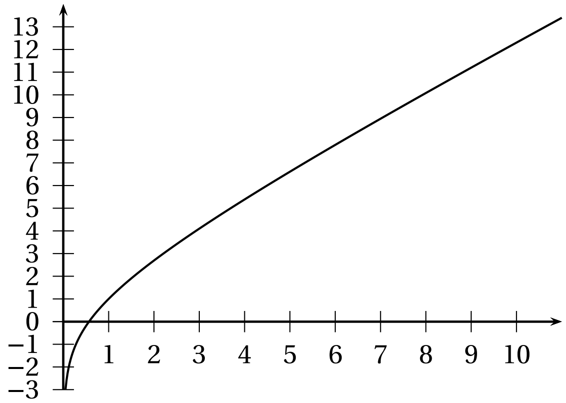
1. Etablir, pour $x \geq 0$, l'encadrement :
$$x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$
2. En déduire un majorant de l'erreur dans l'approximation
$$\ln(1+x) \simeq x$$
3. Justifier le « truc »du banquier, pour les petites valeurs de t ($t \leq 14$).
4. Enoncer des règles analogues pour déterminer mentalement le temps au bout duquel un capital triple, quintuple, décuple.

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. (a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$.
   On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n, $\alpha_n + \ln\alpha_n = n$.
   (b) Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $(O\vec{i}, \vec{j})$.
   Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
   (c) Préciser la valeur de α_1.
   (d) Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
   (b) Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par
   $$h(x) = \ln x - x + 1.$$
   En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.
   (c) Tracer Δ sur le graphique de la page annexe.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.
4. Déterminer la limite de la suite (α_n).

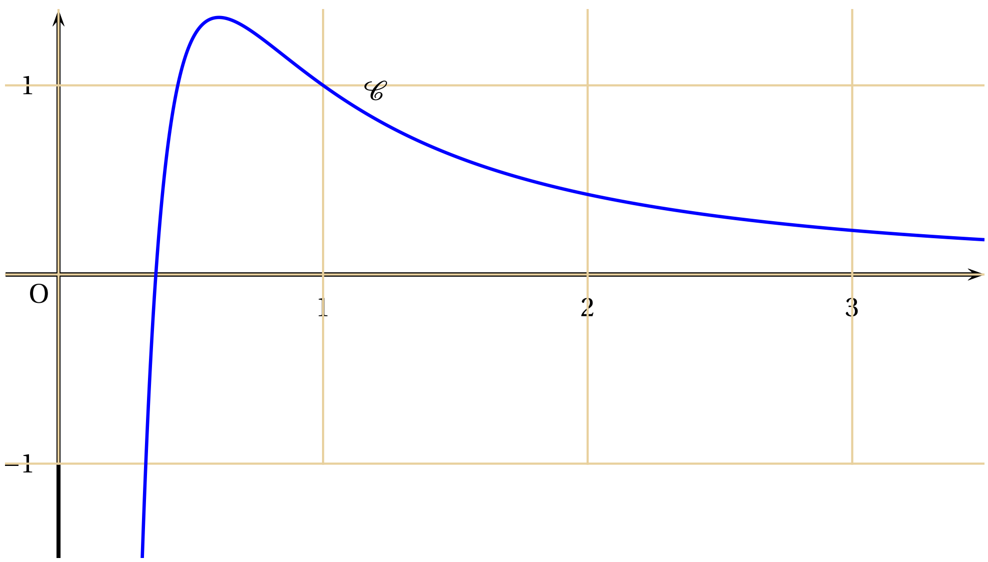


Exercice 13. **Amérique du nord 2013**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. (a) Étudier la limite de f en 0.

   (b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

   $$f'(x)=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   (b) Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x)>0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

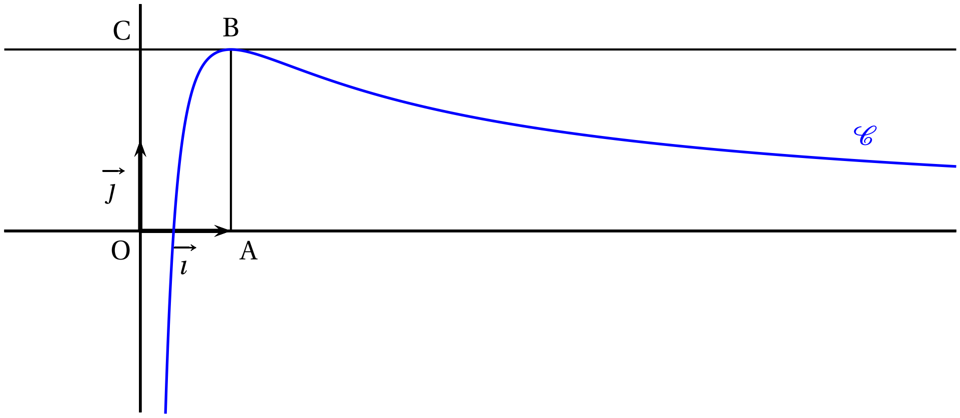
   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. (a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 14. **Métropole 2013**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,,0)$, $(1\,,2)$, $(0\,,2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. (a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

   (b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

   (c) En déduire les réels a et b.

2. (a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

   (b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,,1]$.

   (b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\,,+\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.
   Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

zancanaro.math@gmail.com

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

(a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

(b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

(c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.