∾ FEUILLE D'EXERCICES ∾
ESPACES

I. Exercices du cours

Exercice 1.

1. ABCD est un tétraèdre. Le point I est le milieu de [AB] et J est le point de [AD] tel que $AJ = \frac{2}{3}AD$.
   Déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).
2. ABCDEFGH est un cube. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [EF], [FB] et [FG].
   Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).

Exercice 2. On considère une pyramide SABCD dont la base ABCD est un parallélogramme.
Les points I et J sont définis par

$$\overrightarrow{SI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SA} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{SJ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{SB}$$

Enfin K est le milieu du segment [DC].
But : Construire la section du solide par le plan (IJK).

1. Représenter la situation en perspective cavalière.
2. Déterminer la position du point L d'intersection entre la droite (IJ) et le plan (ABC).
3. Représenter en rouge la section du plan (IJK) sur les faces SAB et ABCD.
4. On note H le point d'intersection entre le plan (IJK) et la droite (AD). Déterminer la position de H.
5. En déduire la section de la face SAD par le plan (IJK).
6. Terminer la construction de cette section.

Remarque : Pour tracer la section d'un solide par un plan, il faut déterminer et tracer les intersections de ce plan avec toutes les faces du solide.

Exercice 3. On considère un cube ABCDEFGH, I est le milieu de [AB], J celui de [BC] et K celui de [HG].
Déterminer la section de ce cube par le plan (IJK).

Exercice 4. Soit SABCD une pyramide régulière de sommet S à base carrée. Soit I le milieu de l'arête [SA]. Le plan (CDI) coupe le plan (SAB) selon une droite d.
Démontrer que d est parallèle à (AB).

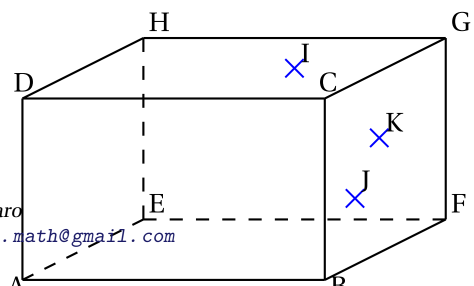
Exercice 5. Soit ABCDEFGH un pavé droit. Soit I un point de [EF]. Déterminer et tracer l'intersection des plans (EFG) et (ACI).

Remarque : L'intersection se note à l'aide du symbole $\cap$. Si la droite d est l'intersection de P et Q, on note $d = P \cap Q$

Exercice 6. Soit ABCD un tétraèdre. Soit I, J et K les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC] et [BD].
Démontrer que (IJK)//(ACD).

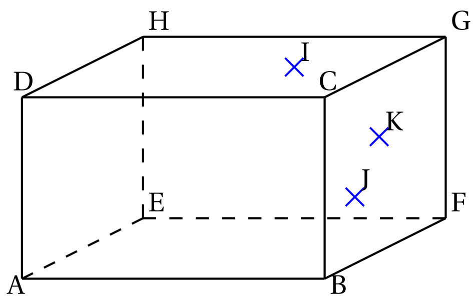
Exercice 7. SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un trapèze.
Démontrer que la droite (CD) est parallèle au plan (SAB).

Exercice 8.



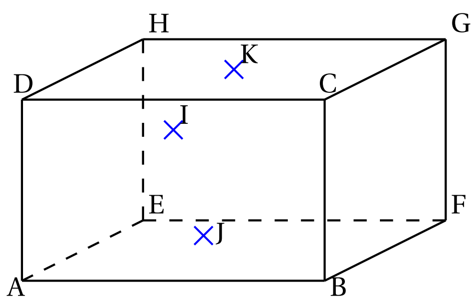
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (BFG) et $I \in$ (CDH), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 9.



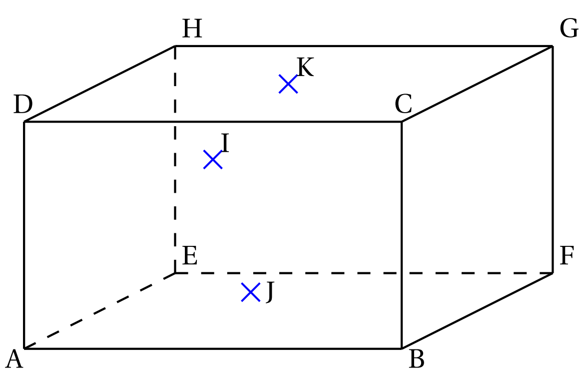
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (EFG) et I ∈ (CDH), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 10.



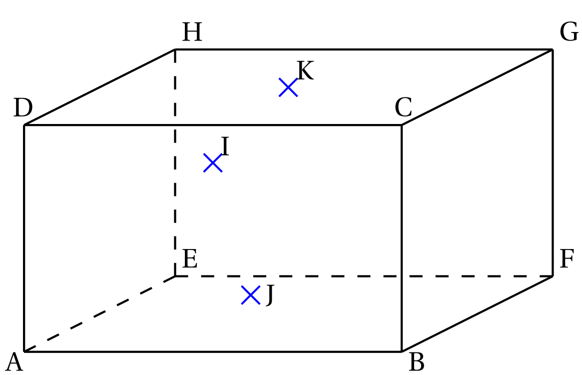
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et K ∈ (DCG), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 11.



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et K ∈ (EFG), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

Exercice 12. (Pour les experts)

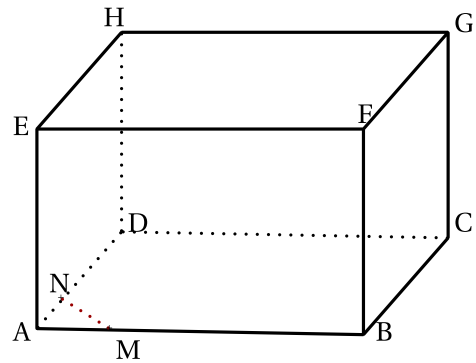


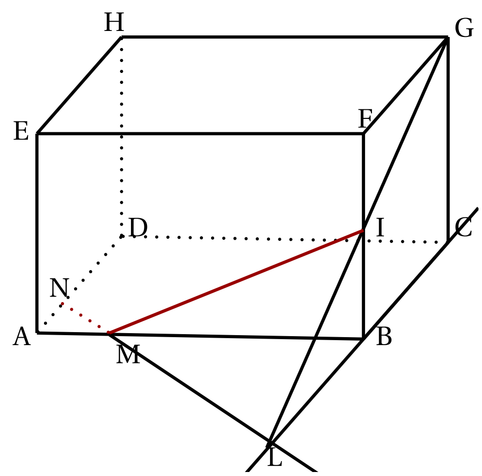
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et K sont dans (EFG) et J ∈ (ABF), comme sur la figure ci-contre.
Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

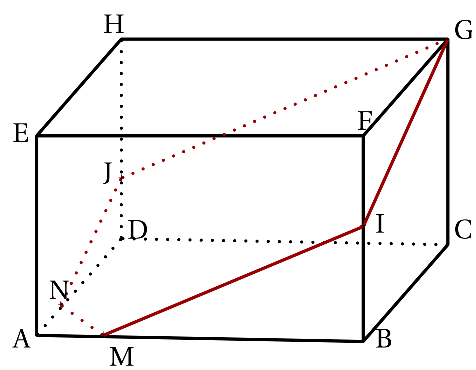
Exercice 13. Soit ABCDEFGH un pavé droit. Soit N et M deux points respectivement situés sur les arêtes [AD] et [AB]. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (MNG).

Voici les différentes étapes :

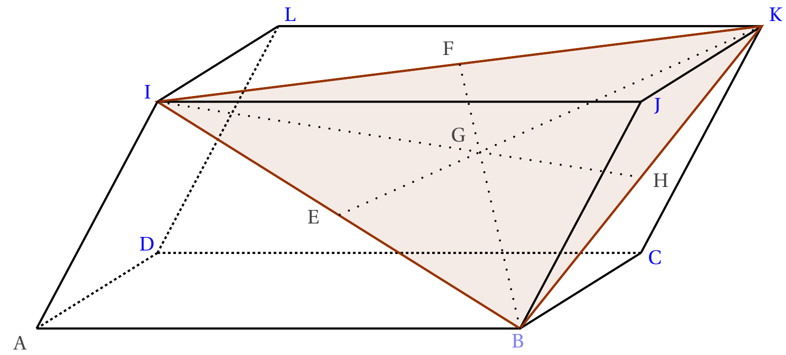
1. **Trace du plan** (MNG) **sur la face** ABCD
   M et N sont deux points communs aux plans (ABC) et (MGN).
   L'intersection de ces deux plans est donc la droite (MN), et la trace du plan (MGN) sur la face ABCD est donc le segment [MN]. (en pointillés rouge sur la figure).
2. **Trace du plan** (MNG) **sur les faces** BCGF **et** ABFE**.**
   Le point G est commun aux plans (MNG) et (BCG). Il suffit de trouver un second point commun aux deux plans.
   $(MN) \subset (MGN)$ et $(BG) \subset (BCG)$ donc le point d'intersection de (MN) et (BC) appartient à la fois aux plans (MNG) et (BCG. Appelons L ce point. On en déduit que l'intersection des plans (MNG) et (BCG) est la droite (GL).
   Soit I le point d'intersection de (GL) et (BF) : les segments [GI] et [MI] sont les traces du plan (MNG) sur les faces BCGF et ABFE respectivement (en traits pleins rouge sur la figure).
3. **Traces du plan** (MNG) **sur les faces** CGHD **et** ADHE
   Les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles. Le plan (MGN) coupe le plan (BCG) selon la droite (GI). On en déduit que (MGN) coupe (ADH) selon une droite parallèle à (GI).
   $N \in [AD] \subset (ADH)$ donc $N \in (ADH)$.
   De plus, par définition $N \in (MGN)$. N appartient donc à l'intersection des plans (MGN) et (ADH).
   On en déduit que l'intersection de ces deux plans est la droite parallèle à (GI) passant par N.
   Cette droite coupe l'arête [DH] en un point J : les segments [NJ] et [JG] sont donc les traces du plan (MNG) sur les faces ADHE et CGHD respectivement (en traits pointillés rouge sur la figure).
4. **Section du pavé** ABCDEFGH **par le plan** (MGN)**.**
   La section du pavé par le plan (MGN) est donc le pentagone MIGJN.







Exercice 14. ABCDIJKL est un parallélépipède. G est le centre de gravité du triangle BIK. Démontrer que J, D et G sont alignés.



Exercice 15. ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [EB] et J le milieu de [FG].
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Exercice 16. ABCD est un tétraèdre. Le point I est le milieu de [CD] et le point K est défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1. Faire une figure et placer K.
2. Exprimer $\overrightarrow{BI}$ puis $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. En déduire que les points B, K et I sont alignés.

Exercice 17. ABCDEFGH est un cube. M et L sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$
2. En déduire la position de la droite (ML) par rapport au plan (DBH)

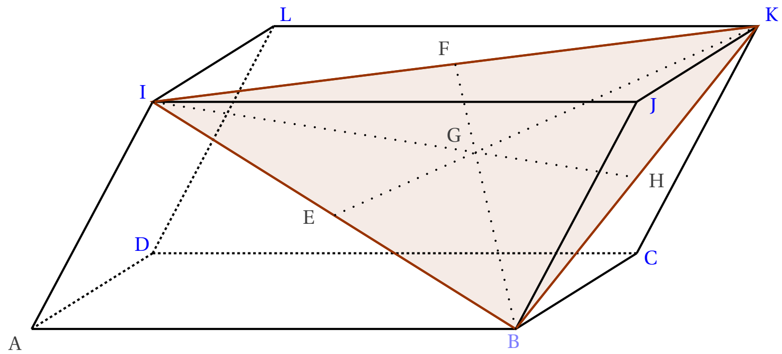
Exercice 18. ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [CD] et [EF].

1. Démontrer que la droite (CK) est parallèle au plan (IJH)
2. Démontrer que les plans (IJH) et (BCK) sont parallèles

Exercice 19. SABCD est une pyramide à base carré ABCD. Le point O est le centre de ABCD.
J est le milieu de [SO]. Le point K est tel que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$

1. Justifier que S, B, D, O, J et K sont coplanaires.
2. (a) Démontrer que $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$
   (b) Justifier que $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}\right)$ et en déduire que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SD}$
   (c) Montrer que B, J et K sont alignés.
3. Positions relatives de plans
   (a) Etudier la position relative du plan (BJC) avec le plan (ABC) et avec le plan (SCD).
   (b) Etudier la position relative des plans (BJC) et (SAD).
   (c) Construire la section de la pyramide SABCD par le plan (BJC). Ne pas justifier.

Exercice 20. ABCDIJKL est un parallélépipède. G est le centre de gravité du triangle BIK.
Démontrer, analytiquement, en choisissant un repère, que les points D, G et J sont alignés.



Exercice 21. Déterminer l'équation de la sphère de centre A(1;2;3) et de rayon 4.

Exercice 22. Déterminer l'équation de la sphère de diamètre [AB] où A(−2;3;−4) et B(1;0;−6).

Exercice 23. On considère l'objet géométrique d'équation $2x+y-z=2$; démontrer qu'il s'agit d'une sphère et préciser son centre et son rayon.

Exercice 24. Démontrons par l'absurde le théorème du toit vu en seconde et rappeler cette année. On rappelle que l'on considère deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants selon une droite Δ. De plus, on sait qu'une droite d de $\mathscr{P}$ est parallèle à une droite d' de $\mathscr{P}'$. Pour raisonner par l'absurde, on suppose de plus que Δ n'est pas parallèle à d et d'.
On désigne par $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ.

1. Expliquer pourquoi ce vecteur $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$.
2. Expliquer pourquoi il existe un vecteur $\vec{v}$ non nul directeur de d et d'.
3. Expliquer pourquoi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
4. Expliquer pourquoi ce vecteur $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$.
5. En déduire une contradiction et conclure.

Exercice 25. Dans un repère de l'espace, on considère les points E(2;−3;5), F(0;−1;1), H(1;−8;8) et la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 4-t \\ z = -2+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que d et (EF) sont strictement parallèles.
2. Montrer que d et (EH) sont sécantes et préciser leur point d'intersection K.

Exercice 26. On considère un tétraèdre ABCD. Soit E le milieu du segment [AC] et G le centre de gravité du triangle BCD.

1. Construire le point K défini par :
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AK}$$
2. Démontrer que les points E, G et K sont alignés.
3. La parallèle Δ à la droite (EG) passant par A passe-t-elle par le symétrique de C par rapport à G ?

Exercice 27. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les points A(1;2;−1) et B(2;4;−4).

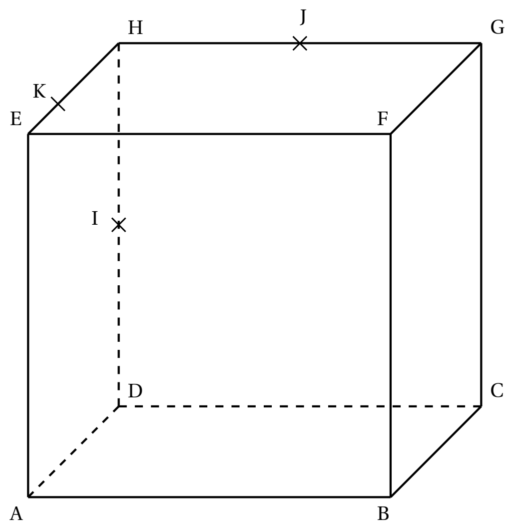
1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. (a) Démontrer que la droite (AB) et l'axe $(O, \vec{k})$ sont sécants. Préciser les coordonnées du point commun K.
   (b) Déterminer des représentations paramétriques du segment [AB] et de la demi-droite [BK).

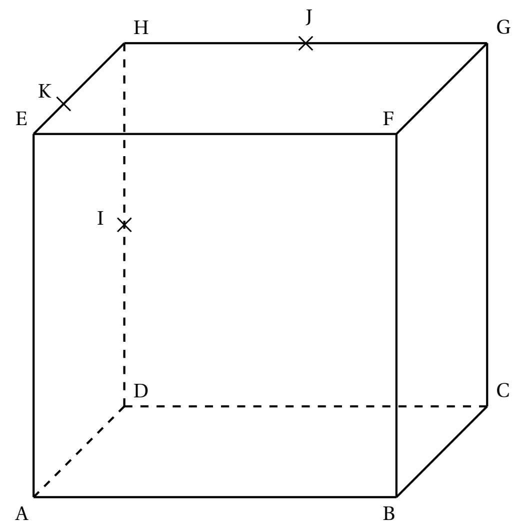
II. Un exemple de devoir

Exercice 1 : **Sections** **(3 points)**

ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [DH], J celui de [HG] et K est le point tel que $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.

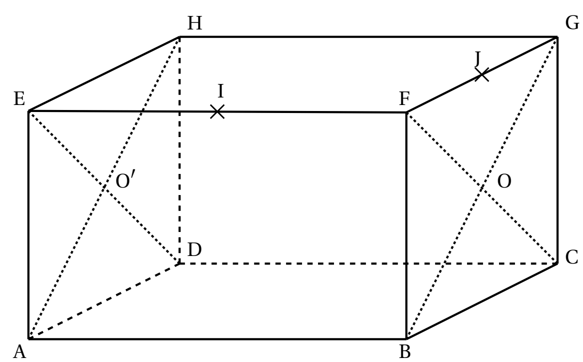
1. Sur la première figure, tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (DKF)
2. Sur la seconde figure, tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (BIJ)





Exercice 2 : **(5 points)**

ABCDEFGH est un pavé droit. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].
Les points O et O′ sont les centres respectifs des faces BCGF et ADHE.



1. Identifier les points M, N et P définis par :

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{GH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \qquad \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} \qquad \overrightarrow{GP} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

2. Montrer que (EC) et (IO) sont parallèles.
3. Déterminer (en justifiant) la position relative des plans (OIJ) et (ACE).
4. Soit K le point défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$
   (a) Montrer que $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DJ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{JA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{JG}$
   (b) Montrer que $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JG} = \overrightarrow{GD}$
   (c) Déduire des deux questions précédentes que les points D, K et J sont alignés.

Exercice 3 : (4 points) On considère un pavé droit ABCDEFGH.

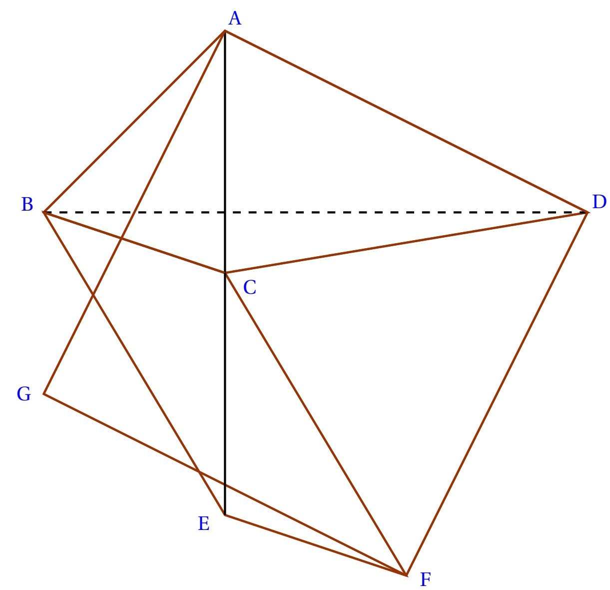
1. Construire les points K et L définis par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$$

2. En exprimant les vecteurs $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{HL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$, démontrer que les points H, K et L sont alignés.
3. Soient I et J les symétriques respectifs de A par rapport à E et C.
   (a) Démontrer que les droites (EC) et (GI) sont parallèles.
   (b) Justifier que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$.
   (c) Le point K appartient-il au plan (AIJ) ?

Exercice 4 : (6 points)

ABCD est un tétraèdre.
E est le symétrique de A par rapport à C,
F est le point tel que BCFE est un parallélogramme,
G est le point tel que ADFG est un parallélogramme.
On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}\right)$.



1. Pourquoi $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}\right)$ est-il un repère de l'espace ?
2. Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
3. Déterminer les coordonnées des points E, F et G. ***Justifier un minimum.***
4. Démontrer que B, G, C et D sont coplanaires.
5. En déduire la position relative de G et du plan (BCD).

Exercice 5 : (5 points)
Dans un repère de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(-2;2;-1) \qquad B(2;0;3) \qquad C(-2;0;0) \qquad D(0;-4;1) \qquad E(-2;-1;-2)$$

1. Vérifier que A, B et C définissent bien un plan.
2. (a) Montrer que $\overrightarrow{DE}$ est colinéaire au vecteur $-\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
   (b) Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?
   (c) Que peut-on en déduire sur la droite (DE) et le plan (ABC) ?
3. (a) Le point E appartient-il au plan (ABC) ?
   On pourra regarder si les points A, B, C *et* E *sont coplanaires*
   (b) Préciser alors votre réponse de la question **2.c)**

Exercice 6 : (5 points)

Dans un repère de l'espace, on donne des représentations paramétriques des droites suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 1-3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \begin{cases} x = -4-3t \\ y = 9-2t \\ z = -5+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Le point A$(17;23;-12)$ appartient-il à d_1 ? appartient-il à d_2 ?
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d_3 passant par B$(1;-2;3)$ et parallèle à d_1.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   Bonus : A votre avis, que faut-il changer dans la représentation paramétrique de la droite (AB) pour décrire le segment [AB] ?
4. Déterminer la position relative de d_1 et d_2.
   On précisera les coordonnées de leur point d'intersection s'il existe.

Exercice 7 : (4 points)

On donne les représentations paramétriques de droites suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2-2t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 3-6t \\ y = 2t \\ z = 2-t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad d_3 : \begin{cases} x = 2-t \\ y = -3-5t \\ z = 10 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad d_4 : \begin{cases} x = -3-2t \\ y = 4+t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Simone a utilisé le logiciel Xcasfr pour faire ses derniers exercices de géométrie dans l'espace.

```
1 resoudre([1+4t=3,2-2t=1,1+t=1.5],t)
                                          [1/2]
2 resoudre([1+4t=0,2-2t=5,1+t=3],t)
                                          []
3 resoudre([1+4t=3-6u,2-2t=2u,1+t=2-u],[t,u])
                                          [2, -1]
4 resoudre([1+4t=2-u,2-2t=-3-5u,1+t=10],[t,u])
                                          []
5 resoudre([1+4t=-3-2u,2-2t=4+u,1+t=-0.5u],[t,u])
                                          [t, -2.0×t -2.0]
```

Pour chaque commande entrée sur le logiciel **(la** 5^e **est en bonus)** :

– Rédiger la question que Simone pouvait vouloir résoudre,
  Il peut y avoir plusieurs questions possibles, en donner une seule suffit.

– Répondre à cette question grâce aux résultats donnés par le logiciel.