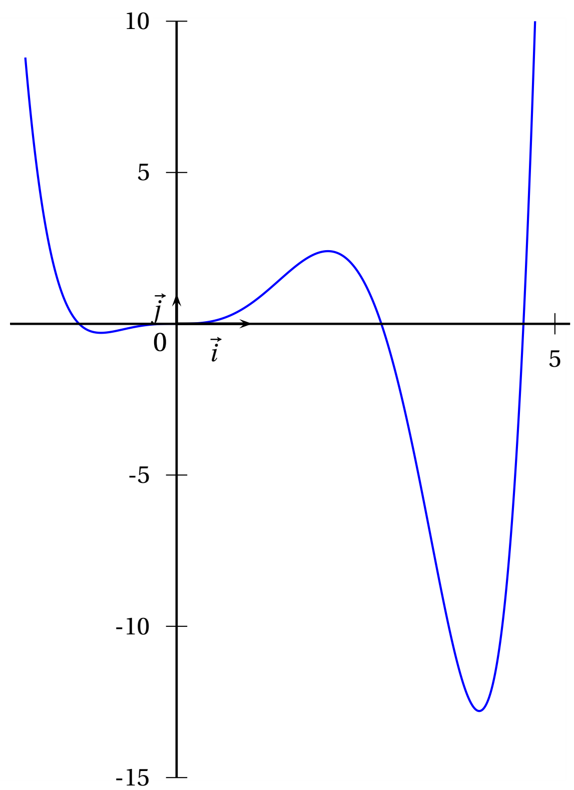
∽ EXERCICES ∽ DÉRIVATIONS

Exercice 1.

1. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse a à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 4x + 5$.
2. En quels point de $\mathscr{P}$ peut-on mener une tangente issue de l'origine ? Vérifier sur un dessin.

Exercice 2. La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto 0,05(x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 16x^3)$

1. Lire graphiquement le signe de $f'(x)$ sur $[-2;5]$
2. Préciser en quels points f admet un extremum relatif.



Exercice 3. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable, puis étudier les variations de f.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
2. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$
3. $f(x) = x^2(x-1)^3$
4. $f(x) = x^4 - 4x$
5. $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$
7. $f(x) = 3 - \cos^2 x$ sur $[0;\pi]$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ sur $]0;\pi[$
9. $f(x) = x - 9\sqrt{x}$
10. $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$

Exercice 4. On pose, pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 0$, $f_n(x) = x^n\sqrt{x}$.
Montrer que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ et exprimer $f'_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

Exercice 5. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée :

1. $f(x) = \cos x^2$
2. $f(x) = \cos(\cos x)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$
4. $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$
5. $f(x) = \sqrt{5 + \sin x}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x\sqrt{x}-\frac{3}{16}x^2$$

1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 4.
2. Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.
3. Dessiner la situation correspondante.

Exercice 7. Etudier le signe de $g(x)=30x^3+19x^2-1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 8.

Plan d'étude d'une fonction

1. Ensemble de définition
2. Ensemble d'étude, propriétés géométriques de la courbe (certaines propriétés, telle la périodicité, peuvent permettre de réduire l'ensemble sur lequel on étudie la fonction)
3. Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
4. Dérivabilité, variations
   – On calcule la dérivée de la fonction sur les intervalles où elle existe

   – Son signe fournit le sens de variation.
5. Branches infinies (éventuellement)
6. Représentation graphique avec quelques points et tangentes remarquables

Etudier et représenter graphiquement la fonction f en prenant appui sur le plan d'étude donné précédemment :

1. $f(x)=x^3+5x^2-10$
2. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$
3. $f(x)=x-3+\dfrac{2}{x+1}$
4. $f(x)=x^4-2x^2+5$

Exercice 9. On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}-\{-2;0\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}$

1. Etudier les limites de f et de g aux bornes de leur ensemble de définition. En déduire que les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont les mêmes asymptotes.
2. Etudier les variations des fonctions f et g.
3. Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente en $\Omega(-1;0)$, et les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Représenter $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un même repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$
5. Montrer que Ω est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ et $(\Omega,\vec{j})$ axe de symétrie de $\mathscr{C}_g$

Exercice 10. On considère la fonction

$$f=x\longmapsto x+\sqrt{x^2+1}$$

1. Vérifier que f est définie sur $\mathrm{D} =]-\infty, -1[\cup [1; +\infty[$ et montrer que pour tout $x \in \mathrm{D}$:
$$f(x)f(-x) = -1 \tag{1}$$
2. Etudier la limite de f en $+\infty$, puis déduire de (1) celle de f en $-\infty$.
3. Montrer que la droite Δ, d'équation $y = 2x$, est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. On pourra à nouveau utiliser (1).
4. Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ

Exercice 11. La fonction exponentielle [1]

De nombreux phénomènes d'évolution sont modélisés par une fonction dérivable f dont *la dérivée f' est proportionnelle à la fonction f elle-même*. Nous allons observer l'une d'entre elles par la méthode d'Euler.
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et pour tout x $f'(x) = f(x)$

1. Montrer que, pour tous réels a et h (h voisin de zéro), l'approximation affine donnée par le calcul des dérivées s'écrit :
$$f(a+h) \simeq f(a)(1+h)$$
2. En déduire que, si l'on part de $f(a)$, la suite des valeurs approchées de $f(x)$ obtenus par la méthode d'Euler [2], avec le pas h, est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?
3. Déduire de la question 2. que $f(1) \simeq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ pour les grandes valeurs de n. Donner la valeur approchée de $f(1)$ correspondant à $n = 10000$.
4. Tracer une approximation de la courbe $\mathscr{C}_f$

Exercice 12. La fonction logarithme népérien

Soit f une fonction vérifiant $f(1) = 0$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

1. Calculer une valeur approchée de $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ et $f(6)$.
2. Construire une approximation de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[1; 6]$.

Exercice 13. Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0; 1]$ telles que $f(0) = g(0)$ et $f' \leq g'$ sur I. Démontrer que $f \leq g$ sur I (On pourra étudier les variations de $g - f$)

Exercice 14. On se propose d'étudier la limite en $\dfrac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \qquad \forall x \neq \frac{\pi}{2}$$

1. Vérifier que l'on est en présence d'une forme indéterminée.
2. Rappeler le taux d'accroissement de f en $\dfrac{\pi}{2}$, puis déterminer la limite ci-dessus.

1. La fonction f, appelée exponentielle sera étudiée ultérieurement
2. Il s'agit, grâce à l'approximation $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$
– d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$ pour certains x.
– de construire la courbe $\mathscr{C}_f$ de façon approchée.