I. Effectuer des calculs algébriques avec les nombres complexes

Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, à quelle condition le nombre complexe $z = x + 2 + i(-ix + x) + 2i - 5ix$ est-il un réel ?
2. A quelle condition est-il un imaginaire pur ?

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z + 6i = z - 2$.
2. (a) Montrer que $z^2 - 6z + 25 = (z-3)^2 + 16$.
   (b) En déduire les solutions de l'équation $z^2 - 6z + 25 = 0$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\frac{-i}{z+1} = 2$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-contre. Les solutions seront données sous forme algébrique.

1. $(-1+2i)z = 3 + i$
2. $z^2 = -9$

Exercice 5. Déterminer les formes algébriques des nombres complexes donnés. Préciser, le cas échéant, s'il est réel ou imaginaire pur :

1. $z_1 = i(1-4i) + 3(2-i)$
2. $z_2 = (3-i)^2 + 6i$
3. $z_3 = \dfrac{3}{1-i}$
4. $z_4 = \dfrac{1+2i}{2-i}$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$\frac{z+3i}{-5iz+2} = -i$$

Exercice 7. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $\dfrac{1-i}{1+i}$ et $\dfrac{1}{2+i}$

Exercice 8. Déterminer le lieu des points M d'affixe z telle que $\dfrac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

Exercice 9. On considère le complexe $z = x^2 + y^2 - 2x - 3 + i(2x - 1 + y)$

1. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z soit un réel.
2. Déterminer et représenter l'ensemble F des points M′ d'affixe z tel que z soit un imaginaire pur.

Exercice 10. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par :

$$P(z) = z^4 + 4$$

1. Montrer que si le complexe α est solution, il en est de même pour $-\alpha$.
2. Vérifier que, pour tout nombre complexe z on a $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
3. Calculer $P(1+i)$ et en déduire les solutions de $P(z) = 0$.

II. Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur

Exercice 11. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+2i$ et $z_B = 2-i$. Déterminer l'affixe de C tel que OABC soit un parallélogramme :

1. en utilisant les affixes de vecteurs ;
2. en utilisant les affixe d'un milieu.

Exercice 12. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2}i$, $z_B = 2+\frac{1}{2}i$, $z_C = 1-\frac{3}{2}i$ et $z_D = -1-\frac{1}{2}i$.

1. Placer les points sur un graphique puis déterminer l'affixe du milieu I du segment [AC].
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer l'affixe du point E symétrique de A par rapport à B.

Exercice 13. La plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $2-i$; $2i$ et $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
2. Déterminer les affixes des points A′ et B′ symétriques de A et B par rapport à O
3. Lire l'affixe du symétrique C′ de C par rapport à l'axe réel, puis déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CC'}$

Exercice 14. Dans le plan complexe, on donne les points avec leurs affixes :

$$A(1) \qquad B(-2-i) \qquad \text{et} \qquad C(4i)$$

Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 15. On considère le parallélogramme ABCD avec A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = -1-5i \qquad z_B = 4-3i \qquad z_C = 3+3i \qquad z_D = -2+i$$

1. (a) Déterminer l'affixe du point C′, symétrique de C par rapport au point D
   (b) Déterminer l'affixe du point A′ vérifiant : $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$
2. Quelle est la nature du quadrilatère A′BC′D ?

Exercice 16. En utilisant les propriétés du conjugué, écrire le conjugué du nombre complexe donné et le mettre sous forme algébrique :

1. $z_1 = (2-3i)(-1+i)$
2. $z_2 = \dfrac{i(2-i)}{i-3}$

Exercice 17. Soit $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormal direct du plan et a et b deux réels.
Déterminer l'ensemble des points $M(a;b)$ du plan tels que le nombre complexe $z = 2a+b+i(b-1)$ soit :

1. un réel
2. un imaginaire pur
3. nul

Exercice 18.

1. Déterminer le module et un argument de $z = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. Déterminer le module et une valeur approchée à 10^{-2} près d'un argument de $z' = -1+2i$.

Exercice 19. Déterminer et représenter dans chaque cas l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

1. $M \in \mathscr{C} \Longleftrightarrow |z-2-i| = 1$
2. $M \in \mathscr{F} \Longleftrightarrow |z| = |\overline{z}-2+i|$
3. $M \in \mathscr{G} \Longleftrightarrow arg(z+2i) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$
4. $M \in \mathscr{H} \Longleftrightarrow |z-3| = |z-3i|$
5. $M \in \mathscr{K} \Longleftrightarrow |\overline{z}-4+i| = 1$
6. $M \in \mathscr{L} \Longleftrightarrow arg(\overline{z}) = arg(-z)[2\pi]$

III. Equation de degré 2 à coefficients réels

Exercice 20. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $-2z^2+6z-5=0$
2. $(z^2+2)(z^2-4z+4)=0$
3. $(t^2-5)(t^2+6t+14)=0$
4. $(t^2+3)(2t^2+2t-4)=0$
5. $(4z^2-4z+101)(z^2+1)=0$
6. $x^3+6x^2+13x=0$
7. $2z^4-5z^2-18=0$
8. $z^3-12z+48z-128=0$ [1]

IV. Forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 21. Déterminer une forme trigonométrique de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

Exercice 22. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -\sqrt{3}+i \qquad \text{et} \qquad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times z_1^2$$

Exercice 23.

1. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$z^3-1 = (z-1)(z^2+az+b) \forall z \in \mathbb{C}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On appelle j la solution de partie imaginaire positive. Que vaut j^3 ?
3. Etablir que $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$
4. Donner la forme algébrique de j^n suivant les valeurs de l'entier n dans $\mathbb{N}$

Exercice 24. On considère le nombre complexe

$$z = 1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$$

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique
2. Déterminer le module et un argument de z^2
3. Indiquer le signe de la partie réelle de z et celui de la partie imaginaire, puis, à l'aide des propriétés sur le module et l'argument, déterminer le module et un argument de z.
4. Déduire de ce qui précède $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ puis $\cos\dfrac{\pi}{12}$ puis $\sin\dfrac{\pi}{12}$

1. Calculer cette expression pour $z = 8$

Exercice 25. Pour tout nombre complexe z, on définit :

$$\mathrm{P}(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$$

1. Calculer $\mathrm{P}(2)$.
   Déterminer une factorisation de $\mathrm{P}(z)$ par $(z-2)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$
   On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive. Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.
   Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.
3. (a) Placer, dans le plan, muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (unité graphique : 2 cm), les points : A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2, et I le milieu de [AB].
   (b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle.
   En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{\mathrm{OI}})$.
   (c) Calculer l'affixe z_I de I, puis le module de z_I.
   (d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8}$

Exercice 26. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M$'$ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$

1. Soit A et B les points d'affixes :
   $$z_\mathrm{A} = 1 - i \qquad \text{et} \qquad z_\mathrm{B} = 3 + i$$
   (a) Calculer les affixes des points A$'$ et B$'$, images des points A et B par f.
   (b) On suppose que deux points ont la même image par f.
   Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2. Soit I le point d'affixe -3.
   (a) Démontrer que OMIM$'$ est un parallélogramme si, et seulement si, $z^2 - 3z + 3 = 0$
   (b) Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$
3. (a) Exprimer $(z'+4)$ en fonction de $(z-2)$.
   En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$, puis entre $arg(z'+4)$ et $arg(z-2)$.
   (b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_\mathrm{J} = 2$ et $z_\mathrm{K} = -4$.
   Démontrer que tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M$'$ sur un même cercle que l'on déterminera.
   (c) Soit E le point d'affixe $z_\mathrm{E} = -4 - 3i$. Donner la forme trigonométrique $z_\mathrm{E} + 4$ et à l'aide du 3)(a) démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

V. Annales

Exercice 27. **Pondichery -2013**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.

On note i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_\mathrm{A} = 1$ et le point B d'affixe $z_\mathrm{B} = \mathrm{i}$.

À tout point M d'affixe $z_\mathrm{M} = x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M$'$ d'affixe $z_{\mathrm{M}'} = -\mathrm{i}z_\mathrm{M}$.

On désigne par I le milieu du segment [AM].

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM′ (propriété 1) et que BM′ = 2OI (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend
   $z_{\mathrm{M}} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Déterminer la forme algébrique de z_{M}.
   (b) Montrer que $z_{\mathrm{M}'} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   Déterminer le module et un argument de $z_{\mathrm{M}'}$.
   (c) Placer les points A, B, M, M′ et I dans le repère $(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
   Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.
2. On revient au cas général en prenant $z_{\mathrm{M}} = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.
   (a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   (b) Déterminer l'affixe du point M′ en fonction de x et y.
   (c) Écrire les coordonnées des points I, B et M′.
   (d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM′.
   (e) Montrer que BM′ = 2OI.

Exercice 28. **Polynésie 2013**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 *point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.*

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

   (a) $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$ (b) $\sqrt{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ (c) $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ (d) $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$
2. L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet :
   (a) une solution
   (b) deux solutions
   (c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
   (d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.
3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points A(1 ; 2 ; 3), B(−1 ; 5 ; 4) et C(−1 ; 0 ; 4). La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

   (a) $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ (b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

   (c) $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ (d) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point D(−1 ; 2 ; 3) et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ (3 ; −5 ; 1), et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t - 7 \\ y = t + 3 \\ z = 2t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

(a) La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
(b) La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathscr{P}$.
(c) La droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.
(d) La droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 29. (Antilles-Guyanne 2013)

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1+\mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.
2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : A et B des nombres réels
            K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
                 Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
    Affecter à A la valeur (A + √(A² + B²))/3
    Affecter à B la valeur B/3
FinPour
Afficher A
```

(a) On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

(b) Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).

3. (a) On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z|+\left|z'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}.$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{2|z_n|}{3}.$$

(b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 30. **Extrait - Métropole 2013**

Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$ est une droite.
2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.
3. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$.
   (a) $\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses.
   (b) $\mathscr{E}$ est l'axe des ordonnées.
   (c) $\mathscr{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.
4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   (a) Le triangle OBC est isocèle en O.
   (b) Les points O, B, C sont alignés.
   (c) Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

Exercice 31. **Nouvelle Calédonie 2013**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α, $1+\mathrm{e}^{2i\alpha} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_A = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

   Proposition : $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice 32. **Amérique du sud -2013**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation

$$(E) : \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   (a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   (b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   (c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n i}{2}\right)$.
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

   Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.
5. On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}\left(2^n - 1\right)$.
   (b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1000$.