2013-2014

Les cours du Lycée J. Durand

Mathématiques

Terminale S

Enseignement de spécialité

Rédaction :

David Zancanaro

Réalisé à l'aide de :

LaTeX

Table des matières

Leçon 2

Matrice PARTIE 1

I. Définitions et premières propriétés

I.1. Exemple introductif

Synthèse de l'aspirine

Un laboratoire pharmaceutique produit de l'aspirine en la synthétisant à partir de deux composants (l'acide salicylique et l'anhydride acétique) et avec l'aide d'un catalyseur (l'acide sulfurique concentré).

La production est répartie entre deux sites appelés S_1 et S_2. Le tableau ci-dessous présente les quantités de composés chimiques utilisées pour le premier semestre de l'année 2012 :

	Acide salicylique (kg)	Anhydride acétique (L)	Acide sulfurique (L)
Site de production S_1	2300	3000	80
Site de production S_2	1500	2100	50

On peut représenter ce tableau en supprimant les titres des lignes et des colonnes et en entourant le contenu avec des parenthèses. On obtient un objet mathématique nommé **matrice**, à deux lignes et trois colonnes, que l'on nomme A_1. Voici comme s'écrit la matrice A_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2300 & 3000 & 80 \\ 1500 & 2100 & 50 \end{pmatrix}$$

1. Voici la matrice A_2 donnant les quantités de composés chimiques utilisées pour le second semestre 2012 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2500 & 3300 & 90 \\ 1800 & 2500 & 60 \end{pmatrix}$$

   Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la valeur du nombre situé à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne.
2. On souhaite calculer la matrice A donnant les quantités de composés chimiques utilisés sur l'ensemble de l'année 2012 ; comment procéder ? Calculer les six coefficients de cette matrice A, appelée somme des matrices A_1 et A_2 et notée $A_1 + A_2$.
3. Pour l'année 2013, le laboratoire prévoit une augmentation homogène de la production de 5%. Par quel nombre doit-on multiplier tous les coefficients de la matrice A_1 pour obtenir la matrice B_1 donnant les quantités de composés chimiques nécessaire à cette production lors du premier semestre 2013 ? Calculer B_1, puis la matrice B_2 donnant ces quantités pour le second semestre 2013. Calculer de deux manières différentes la matrice B dont les coefficients sont les quantités de produit prévues pour la production de l'ensemble de l'année 2013.

I.2. Définitions

Dans tout ce qui suit, n, m et p sont des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

Définition 1.

Une matrice A de dimensions $m \times p$ est un tableau de nombres à m lignes et p colonnes.
Ces nombres sont appelés les coefficients de la matrice A.
Pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$, on note a_{ij} le coefficient de la matrice situé au croisement de la $i-$ème ligne et $j-$ème colonne.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & -9 \\ 10 & \frac{1}{2} & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimensions 3×4. $a_{23} = 7$.

Définition 2.

Une matrice de dimensions $1 \times p$ est appelée vecteur-ligne.
Une matrice de dimensions $m \times 1$ est appelée vecteur-colonne.
Si $m = p$ alors la matrice est dite carrée d'ordre p.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est un vecteur ligne de dimensions 1×3.

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

est un vecteur colonne de dimensions 3×1.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & -9 \\ 10 & \frac{1}{2} & 5 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

est une matrice carré d'ordre 4.

I.3. Opération sur les matrices

I.3.a. Somme de deux matrices

Définition 3.

La somme de deux matrices de mêmes dimensions $m \times p$ est la matrice de dimensions $m \times p$ obtenue en ajoutant entre les coefficients occupant la même position dans chacune des matrices.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 10 & -5 & 8 & -18 \end{pmatrix}$$

Propriété 1.

Soit A, B et C trois matrices de mêmes dimensions. Alors on a :
$A + B = B + A$: on dit que la somme de matrices est **commutative** ;
$(A + B) + C = A + (B + C)$: on dit que la somme de matrices est **associative**.

Preuve
Ces propriétés découlent immédiatement de la commutativité et de l'associativité de l'addition des nombres réels.

I.3.b. Produit d'une matrice par un nombre réel

Définition 4.

Le produit d'une matrice par un nombre réel est la matrice obtenue en multipliant chacun des coefficients de cette matrice par ce nombre réel.

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ alors $(-2) \times A = -2A = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -10 & 12 \end{pmatrix}$

Propriété 2.

Soit λ et μ deux nombres réels et A et B deux matrices de mêmes dimensions. On a :

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad , \quad (\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A \quad \text{et} \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

Définition 5.

La matrice opposée de la matrice A se note $-A$ et est la matrice $(-1) \times A$.
La différence de deux matrices A et B (notée $A - B$) est la matrice $A + (-B)$.
La matrice nulle, notée 0, est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0.

Propriété 3.

On a, pour toute matrice A :

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$0 \times A = 0$$

Preuve

Toutes ces propriétés découlent directement des propriétés de la multiplication et de l'addition des nombres réels.

I.3.c. Produit de deux matrices

Exercice 1. Voici les valeurs nutritionnelles des différents aliments qui composeront le menu des élèves à la cantine de leur école lundi (données pour 100 g pour chaque aliment) :

	Melon	Poulet	Riz	Yaourt
Energie (Kcal)	25	140	350	100
Protéines (g)	0,7	21	7	0
Glucides (g)	5	0	78	20
Lipides (g)	0,2	7	0,8	5

1. Ecrire la matrice A contenant, en colonnes, la valeur énergétique et nutritionnelle de chaque aliment de ce repas (calculée pour 1g de chaque aliment).
2. Notons $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} m \\ p \\ r \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur colonne donnant les portions respectives (en g) de chacun des aliments composant ce repas et $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0,25 & 1,40 & 3,50 & 1 \end{pmatrix}$ le vecteur ligne donnant la valeur énergétique (prise pour 1 g) de chaque aliment. Exprimer en fonction de m, p, r et y la valeur énergétique totale du repas puis recopier et compléter le calcul suivant :

$$\mathrm{L} \times \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0,25 & 1,40 & 3,50 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m \\ p \\ r \\ y \end{pmatrix} = \ldots\cdots + \ldots\cdots + \ldots\cdots + \ldots\ldots$$

   Reprendre la question 2. avec les apports en protéines, puis avec les apports en glucide, et enfin les apports en lipides, en présentant chaque calcul comme le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne.
3. Il est possible de réunir les quatre calculs précédents en un seul calcul matriciel : recopier et compléter les coefficients manquant :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 0,25 & 1,4 & 3,5 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m \\ p \\ r \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25m + 1,4p + 3,5r + y \\ \cdots + \cdots + \cdots + \ldots \\ \cdots + \cdots + \cdots + \ldots \\ \cdots + \cdots + \cdots + \ldots \end{pmatrix}$$

4. Voici trois propositions de composition de repas constituées en faisant varier les portions m, p, r et y (données en g) :

	Prop 1.	Prop 2.	Prop 3
m	50	60	40
p	75	70	80
r	125	125	100
y	125	125	125

   Ecrire la matrice B de dimensions 4×3 correspondante et calculer le produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ en utilisant le résultat suivant : *la i-ème colonne de la matrice produit* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *est égale au produit de la matrice* A *par la i-ème colonne de* B.

Définition 6.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$ un vecteur ligne de dimensions $1 \times p$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de dimensions $p \times 1$. Le produit $A \times B$ (ou AB) est égal au nombre réel :

$$\sum_{i=1}^{p} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_p b_p$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ -2,5 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + (-3) \times 4 + 2 \times 3 + 0 \times (-2,5) = -6$$

Définition 7.

Soit A une matrice de dimensions $m \times p$ et B une matrice de dimensions $p \times q$.
Le produit de la matrice A par la matrice B, noté $A \times B$ (ou AB), est la matrice C de dimensions $m \times q$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq q$, le coefficient C_{ij} est égal au produit de la i-ème ligne par de A par la j-ème colonne de B.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+0+2+20 & 1+0-6-8 \\ 0+6-3-5 & 0+0+9+2 \\ -12+0-5+0 & 4+0+15+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -13 \\ -2 & 11 \\ -17 & 19 \end{pmatrix}$$

Propriété 4.

Soit A, B et C trois matrices telles que toutes les sommes et tous les produits écrits ci-après existent (c'est le cas par exemple si toutes les matrices sont carrées de même ordre). Alors :

- $AB \neq BA$ en général : le produit de matrices **n'est pas commutatif**.
- $(AB)C = A(BC)$: le produit de matrices est **associatif**.
- $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$: le produit de matrices est **distributif** par rapport à l'addition.
- Pour tout réel λ on a $(\lambda A)B = A \times (\lambda B)$.
- La matrice carrée d'ordre p notée :

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

qui comporte des 1 sur la diagonale et des zéros partout ailleurs est appelée matrice identité d'ordre p.
Il s'agit de l'élément neutre du produit matriciel c'est-à-dire, pour toute matrice A carrée d'ordre p on a :

$$A \times I_p = I_p \times A = A$$

Preuve

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 43 & 1 \end{pmatrix}$, par contre : $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$ ce qui donne deux résultats, par conséquent le produit de matrice n'est pas commutatif.
- Les autres propriétés découlent des propriétés de la multiplication des nombres réels.

I.3.d. Puissance entière d'une matrice

Exercice 2. En 1990, aux états unis, une controverse opposa des environnementalistes à des représentants de l'industrie du bois à propos de la possible extinction de l'espèce des chouettes tachetées pour cause de déforestation. Pour trancher la question, un modèle mathématique de la démographie de cette population de chouettes fut élaboré sur la base d'observations et de recensements de cette population sur une zone donnée. Les scientifiques qui ont étudié et observé cette espèce estiment que :

- le nombre de nouveaux bébés à l'année $n+1$ est égal au tiers du nombre d'adultes vivants l'année n ;
- seuls 20% des bébés nés l'année n parviennent au stade jeune à l'année $n+1$;
- 75% des jeunes et 90% des adultes de l'année n survivent pour être comptabilisées comme adultes à l'année $n+1$.

On note x_0, y_0 et z_0 (resp. x_1, y_1 et z_1) les effectifs de chacune des classes d'âge pour l'année 1990 (resp. 1991). Enfin on note U_0 (resp U_1) le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$)

1. Exprimer x_1 en fonction de x_0, y_0 et z_0. De même exprimer y_1 et z_1 en fonction de x_0, y_0 et z_0.
2. Trouver une matrice carrée d'ordre 3 telle que on ait $U_1 = AU_0$.
3. Notons x_n, y_n et z_n les effectifs de chacune des classes d'âge de cette population pour l'année $1990+n$. On note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Justifier que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Calculer U_2 puis U_3 (arrondir à l'unité).
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n > 0$, on a
   $$U_n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}} \times U_0$$
   (d) A l'aide de votre calculatrice calculer U_5.
   (e) En calculant les puissances de A à la calculatrice, déterminer la répartition de la population de chouettes tachetées après 10, 15, 20, 25 et 30 ans. Que peut-on envisager pour l'évolution à long terme de la population des chouettes tachetées dans cette région ?

Définition 8.

Soit A une matrice carrée d'ordre p et n un entier naturel supérieur ou égal à 1. La puissance n-ième de A est la matrice carrée d'ordre p obtenue en multipliant n fois la matrice A par elle-même :
$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et de même :

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Remarque : Soit A une matrice carrée diagonale d'ordre p c'est-à-dire avec des coefficients nuls sauf sur la diagonale principale, notons $A = diag(d_1, d_2, \dots, d_p)$ alors pour tout entier naturel n on a $A^n = diag(d_1^n, d_2^n, \dots, d_p^n)$.
Le calcul des puissances d'une matrice diagonale est donc extrêmement aisé : c'est pour cela que, dans de nombreux exercices où il est demandé de calculer explicitement des puissances de matrices, on cherche à se ramener à des matrices diagonales lorsque cela est possible.

Propriété 5.

Soit A une matrice carrée d'ordre p. Soit m et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. On a :

$$A^m A^n = A^{m+n} \qquad \text{et} \qquad (A^m)^n = A^{mn}$$

Preuve

- Ces deux propriétés se démontrent par exemple par récurrence sur n.

Remarque : A cause de la non-commutativité du produit des matrices carrées, en général $(A \times B)^n \neq A^n \times B^n$ et $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

On a cependant le résultat suivant :

Propriété 6.

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre p qui commutent (c'est-à-dire telles que $A \times B = B \times A$). On a alors, pour tout entier $n \geq 1$:

$$(A+B)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-1}$$

Preuve

- Ce résultat se démontre par récurrence sur n.

Exercice 3. Soit A la matrice carrée d'ordre 2 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Nous allons déterminer une forme explicite de la matrice A^n pour tout entier naturel n.
   (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $Inv_P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
   Démontrer que $A = PDInv_P$ et démontrer que $Inv_P \times P = I_2$.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $$A^n = PD^nInv_P$$

Exercice 4. Soit B la matrice carrée d'ordre 2 suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer B^2 et B^3.
2. Nous allons déterminer une forme explicite de la matrice B^n pour tout entier n.
   (a) Démontrer que $B = 2I_2 + C$ où C est une matrice d'ordre 2 que l'on déterminera.
   (b) Calculer C^2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$ on a $C^n = 0$.
   (c) Démontrer que les matrices $2I_2 + C$ commutent. Utiliser la formule du binôme de Newton pour établir que, pour tout entier n on a :
   $$B^n = 2^nI_2 + n2^{n-1}B$$
   (d) Donner une expression explicite de B^n pour tout entier n.

II. Applications : Processus aléatoire - matrice de transition

II.1. Généralités

Lorsqu'on s'intéresse à l'évolution conjointe de plusieurs données reliées entre elles par des relations linéaires, on peut déterminer le passage d'un état des données à un autre en utilisant le produit matriciel.
Si les états possibles à un instant sont numérotés de 1 à n, on peut les représenter par une matrice colonne à n lignes.

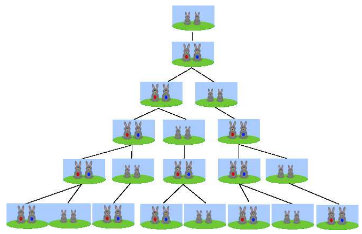
Définition 9.

On appelle **matrice de transition** des états la matrice carrée A de taille n dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j donne à chaque instant le nombre, ou la proportion, ou la probabilité possibles de l'état numéroté j à l'état numéroté i.

Par définition du produit matriciel, à chaque instant les données observées passent de l'état représentées par la matrice colonne X aux états représentées par la matrice colonne X' de telle sorte que $X' = AX$.

Exemple :

« Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »



Ce problème est à l'origine de la suite dont le n-ème terme correspond au nombre de paires de lapins au n-ème mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- Au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;
- Les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;
- Chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux ;
- Les lapins ne meurent jamais (donc la suite de Fibonacci est strictement croissante).

Si l'on note $F(n)$ le nombre de couples de lapins au début du n-ème mois, les premiers termes de la suite sont les suivants :

$$F(1) = 1 \quad F(2) = 1 \quad F(3) = 2 \quad F(4) = 3 \quad F(5) = 5 \qquad F(6) = 8 \qquad F(7) = 13$$

Comme les lapins ne meurent pas, on additionne les lapins qui naissent aux lapins existants, en tenant compte du fait qu'à partir d'un certains âge, ces lapins procréent eux-mêmes ! Et finalement, on a :

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

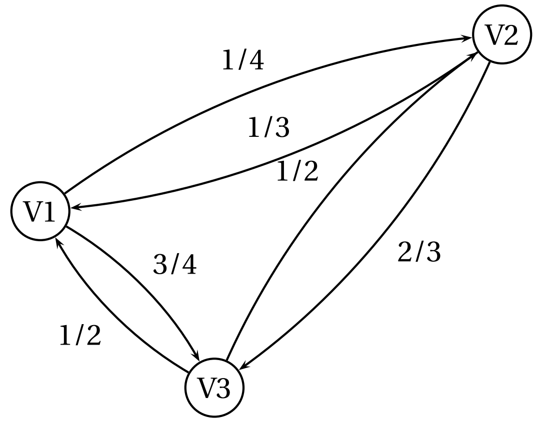
La matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ carrée d'ordre 2 permet de passer du vecteur colonne $\begin{pmatrix} F(2) \\ F(1) \end{pmatrix}$ au vecteur colonne $\begin{pmatrix} F(3) \\ F(2) \end{pmatrix}$ En effet on a : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.

1. A l'aide d'un calcul matriciel, retrouver $F(4)$.
2. Justifier que :
$$\begin{pmatrix} F(n+1) \\ F(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{pmatrix}$$
3. Démontrer, par récurrence que, pour tout entier naturel n on a :
$$\begin{pmatrix} F(n+1) \\ F(n) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. En déduire, à l'aide de votre calculatrice le nombre de couple au bout de 10 ans.

Exercice 6. Soit le graphe suivant constitué de 3 sommets :



On se déplace d'un sommet à un autre sur ce graphe en suivant les arêtes orientées. A chaque déplacement (ou pas) sur une arête, les probabilités de se trouver une le sommet extrémité sachant que l'on est parti du somet origine sont indiquées sur la figure.
On suppose que ces probabilités sont identiques quel que soit le parcours déjà effectué sur le graphe.
On parle de probabilité de transition d'un sommet vers un autre.

Définition 10.

La matrice de transition d'une marche aléatoire est la matrice carrée dont le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est la probabilité de transition du sommet j vers le sommet i, soit encore la probabilité d'arriver en i sachant qu'on est parti de j.

1. Donner la matrice de transition associée à ce graphe.
2. Expliquer pourquoi la somme des coefficients d'une colonne vaut toujours 1.
3. Soit $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des états après un n déplacements. p_n désigne la probabilité d'être en V1, q_n celle d'être en V2 et r_n celle d'être en V_3.
   Proposer un arbre de probabilité permettant de calculer p_{n+1}, q_{n+1} et r_{n+1} en fonction de p_n, q_n et de r_n.
4. Démontrer que :
$$p_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n$$
$$q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}r_n$$
$$r_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + \frac{2}{3}q_n$$
5. Retrouver ce résultat par un calcul matriciel.

Propriété 7.

Pour une marche aléatoire associée à un déplacement sur un graphe dont la matrice de transition est notée A et la matrice colonne de l'état après n pas est notée X_n. On a

$$X_{n+1} = AX_n$$

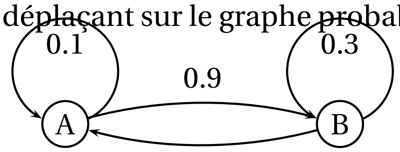
et pour tout entier $n \geq 0$:

$$X_n = A^n X_0$$

Preuve

La première relation se démontre en utilisant la formule des probabilités totales. La seconde se démontre par récurrence en utilisant la première.

Exercice 7. On considère un mobile se déplaçant sur le graphe probabiliste ci-dessous :



On note $X_n = \begin{pmatrix} a_b \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne donnant la probabilité que le mobile occupe le sommet A ou B, n instants après son départ.

1. Donner la matrice de transition A associée à ce système puis en déduire une relation entre X_{n+1} et X_n.
2. S'il part de A, donner X_0 puis calculer la probabilité que le mobile soit en B après 4 pas.
3. S'il part de B, donner X_0 puis calculer la probabilité que le mobile soit à nouveau en B après 5 pas.

II.2. Marche aléatoire

Exercice 8. Une puce se déplace (à raison d'un saut par seconde) sur les sommets d'un triangle équilatéral ABC. A chaque seconde elle saute de façon aléatoire d'un sommet à l'autre, en choisissant avec une égale probabilité (égale à $\frac{1}{2}$) l'un des sommets possibles.

1. Avec l'aide d'un ordinateur, simuler (écrire un algorithme qui donne la position de la puce au bout de 10 sauts, l'exécuter 1000 fois et renvoyer le nombre de fois où la puce est en A, en B et en C.) 1000 marches aléatoires de 10 sauts. La position initiale de la puce étant sur le sommet A.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit X_n la variable aléatoire donnant la position de la puce à l'instant n et U_n la matrice ligne associée à la loi de probabilité de X_n. Initialement la puce est en A.
   (a) Montrer que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que la matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

(b) Entrer les matrices T et U_0 dans une calculatrice et calculer U_{10}, vecteur ligne associée à la loi de probabilité de la variable aléatoire X_{10}. Comment peut-on interpréter chacun des coefficients de ce vecteur ligne ? Comparer les résultats obtenus lors de la simulation.