Chapitre 9

Logarithme Népérien

Hors Sujet

Titre : « Faites le mur »
Auteur : BANKSY
Présentation succinte de l'auteur : Baxter Dury, figure de la scène underground anglaise et accessoirement fils de Ian Dury, nous rejoue l'entrée dans les années 80 à la sauce aigre-douce. Baxter Dury, c'est la co-olitude absolue, le talent décontracté, la nonchalance au rang d'art. J'fais une carrière si j'veux, j'fais un album tous les 6 ans si j'veux, je chante mal si ça me chante bien. Quand certains hurlent à l'approximation, à l'arrogance, d'autres vantent une fraîcheur éternelle, une belle imperfection, une totale sincérité. L'esprit mélancolique punk-ska-rock 80 (Madness, Specials, Joy division...) ne lache pas le disque d'une rangers mais cette fois, Baxter a ouvert la fenêtre et laissé entrer la lumière. « Happy soup » est pop. Lui dit : « Psychédélisme de bord de mer ». La voix traînante et caverneuse du songwriter et celle en contre-point de Madeleine Hart, les histoires autobiographiques, les claviers datés, les guitares teigneuses semblent se plaire dans ce nouveau monde, apprécier d'aller respirer l'air frais. Un son unique.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- Connaitre le sens de variation, la dérivée, les limites et la représentation graphique de la fonction ln
- Utiliser pour $a > 0$ et pour $b \in \mathbb{R}$, l'équivalence $\ln a = b \Longleftrightarrow a = e^b$
- Utiliser la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- Connaître et exploiter $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty$.

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

Leçon 9

Logarithme Népérien

Résumé

Très utile, cette fonction permit aux mathématiciens de transformer les produits en somme, en simplifiant ainsi grandement les calculs, le logarithme népérien est l'ancêtre de la calculatrice et l'utilisation des règles à calcul était basée sur les propriétés de cette fonction...

I. Différentes définitions

Comme souvent en mathématiques, un même objet (ici le logarithme népérien) peut être défini de différentes manières (nous en verrons trois) mais nous aboutirons malgré tout aux mêmes propriétés : le procédé de fabrication change, mais le produit fini est le même.

I.1. Cherchons des fonctions vérifiant $f(a\times b) = f(a) + f(b)$

Historiquement, le logarithme népérien a été pour la première fois mis en évidence par l'Écossais John Napier (en franais Jean Néper..) au tout début du XVII^e siècle. Afin de faciliter la vie des astronomes, navigateurs, financiers de l'époque qui étaient confrontés à des calculs...astronomiques, John rechercha une fonction qui puisse transformer des produits très compliqués à calculer en sommes plus abordables. Il a donc été amené à résoudre une *équation fonctionnelle*, $i.e.$ il a recherché les fonctions f vérifiant $f(a\times b) = f(a) + f(b)$ Il a pu alors établir des Tables de logarithmes, complétées au fil des ans par des mathématiciens. A partir de deux nombres a et b, on lit sur les Tables leurs logarithmes $\ln a$ et $\ln b$; on calcule facilement $\ln a + \ln b$ qui est égal à $\ln ab$, puis on cherche sur les Tables le nombre qui admet pour logarithme $\ln ab$ et qui est bien sûr ab.

I.2. Existe-t-il des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$?

Autre problème : nous pouvons trouver, assez aisément, des primitives des fonctions qui à x associent respectivement x^2, x^1, x^0, x^{-2}, x^{-3}, etc. Vous avez tout de suite remarqué que nous avons oublié quelqu'un : quelles peuvent être les primitives de la fonction qui à x associe $x^{-1} = 1/x$? Une rapide enquête mathématique nous conduit à trouver qu'il s'agit en fait de fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle du copain John. Nous le verifierons !, et c'était l'approche au programme jusqu'en 2005.

I.3. Quelle est la réciproque de la fonction exponentielle ?

Cette année, comme d'habitude, nous roulons pour le nucléaire. Nous avons déjà défini une fonction obéissant à la *loi de décomposition radioactive*, à savoir la fonction exponentielle. Mais de nouveaux problèmes se posent au moment de construire de nouvelles centrales : dans combien de milliards d'années les habitants de Tchernobyl ne risqueront plus d'attraper un cancer de la thyrode en ingérant les légumes irradiés de leurs potagers. Le Physicien est alors amené à résoudre une équation d'inconnue y du type $e^y = 32$ Quel est donc ce y dont l'exponentielle vaut 32 ? Fabrice Couenne, célèbre physicien du XXI^e sicle, vous a déjà donné la réponse : on l'appelle $\ln 32$.

II. Définition et premières propriétés

II.1. Définition

Voici le tableau de variation de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de e^x		$+$		
Variation de e^x	0	1	e	$+\infty$

En appliquant le théorème de la bijection, l'équation $e^x = \lambda$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ dès que $\lambda > 0$.

Définition 1.

Si $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ l'équation $e^x = \lambda$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on appelle logarithme népérien de λ et que l'on note $\ln \lambda$

Remarque : On a donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad e^x = \lambda \Longleftrightarrow x = \ln \lambda$$

En particulier :

$$e^0 = 1 \Longleftrightarrow \ln 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad e^1 = e \Longleftrightarrow \ln e = 1$$

Théorème 1.

La fonction logarithme népérien qui a $\lambda > 0$ associe $\ln \lambda$ vérifie :

$$e^{\ln \lambda} = \lambda \qquad \text{et} \qquad \ln(e^{\alpha}) = \alpha$$

Preuve

On a donc, pour tout $\lambda > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$e^{\ln \lambda} = \lambda \qquad \text{et} \qquad \ln(e^{\alpha}) = \alpha$$

En effet pour la première égalité, comme $\ln \lambda$ est solution de $e^x = \lambda$ on obtient littéralement $e^{\ln \lambda} = \lambda$
De plus le nombre $\ln(e^{\alpha})$ est solution de l'équation $e^x = e^{\alpha} \Longleftrightarrow x = \alpha$, par conséquent $\ln\left(e^{\alpha}\right) = \alpha$

Remarque : La fonction logarithme népérien est donc définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que c'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} = 2$
2. $e^{e^x} = 3$
3. $\ln x = 4$
4. $\ln x^2 = 4$

II.2. Sens de variation

Théorème 2.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ i.e

$$0 < \lambda < \mu \Longrightarrow \ln\lambda < \ln\mu$$

Preuve

Il s'agit de démontrer que

$$0 < \lambda < \mu \Longrightarrow \ln\lambda < \ln\mu$$

On sait par définition que $\ln\lambda$ est l'unique solution de l'équation $e^x = \lambda$, et de même $\ln\mu$ est l'unique solution de l'équation $e^x = \mu$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} & & 0 < \lambda < \mu \\ \Longleftrightarrow & & 0 < e^{\ln\lambda} < e^{\ln\mu} \\ \Longleftrightarrow & \ln\lambda < \ln\mu & \text{en effet on a } e^A < e^B \Longleftrightarrow A < B \end{array}$$

Ainsi nous venons de démontrer que le logarithme népérien est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Exemple :

Résolvons l'inéquation (I) suivante :

$$\ln(5-x) \leq \ln(3-2x)$$

⇝ *Domaine de validité* : Cette équation est définie pour tout x vérifiant $5-x > 0 \Longleftrightarrow x < 5$ et $3-2x > 0 \Longleftrightarrow x < \frac{3}{2}$.

⇝ *Résolution* : Ainsi pour tout $x < \frac{3}{2}$ on a :

$$\begin{array}{rc} & \ln(5-x) \leq \ln(3-2x) \\ \Longleftrightarrow & 5-x \leq 3-2x \\ \Longleftrightarrow & x \leq -2 \end{array}$$

L'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de (I) est :

$$\mathscr{S} =]-\infty;-2]$$

Corollaire 1.

On a :

1. $\ln x < 0 \iff x \in [0;1]$
2. $\ln x = 0 \iff x = 1$
3. $\ln x > 0 \iff x > 1$
4. $\forall \lambda > 0$ et $\forall \mu > 0$ on a

$$\ln \lambda = \ln \mu \iff \lambda = \mu$$

Preuve

1. Pour tout $x > 0$ on a :
$$\ln x < 0 \iff \ln x < \ln 1 \iff 0 < x < 1$$
2. Pour tout $x > 0$ $\ln x = 0 \iff \ln x = \ln 1 \iff e^{\ln x} = e^{\ln 1} \iff x = 1$
3. Puisque 1 et 2 sont vraies, 3 l'est forcément.
4. $\forall \lambda > 0$ et $\forall \mu > 0$ on a
$$\ln \lambda = \ln \mu \iff e^{\ln \lambda} = e^{\ln \mu} \iff \lambda = \mu$$

III. Propriétés algébriques - Relation fonctionnelle

Théorème 3.

Pour tout $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ on a : $\ln \lambda\mu = \ln \lambda + \ln \mu$

Preuve

On utilise les propriétés de la fonction exponentielle qui transforme les sommes en produits :

$$e^{\ln \lambda + \ln \mu} = e^{\ln \lambda} e^{\ln \mu} = \lambda\mu$$

En appliquant le logarithme à cette égalité on obtient :

$$\ln \lambda + \ln \mu = \ln \lambda\mu$$

Corollaire 2.

Pour tous λ et μ strictement positif et pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{\mu}\right) = -\ln \mu$
2. $\ln \lambda^n = n \ln \lambda$
3. $\ln\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right) = \ln \lambda - \ln \mu$
4. $\ln \sqrt{\lambda} = \dfrac{1}{2} \ln \lambda$

Preuve

1. $\ln 1 = \ln \frac{\mu}{\mu} = \ln \mu + \ln \frac{1}{\mu} \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\ln \mu$
2. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété à démontrer.
   - *Initialisation* : Pour $n = 0$, ou $n = 1$ la propriété est trivialement vraie puisque $\ln 1 = 0$.
   - *Hérédité* : Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie pour un certain $n-1$ et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang n.
     On a donc (hypothèse de récurrence)
     $$\ln \lambda^{n-1} = (n-1)\ln \lambda$$
     Par conséquent,
     $$\ln \lambda^{n} = \ln \lambda^{n-1} \times \lambda = (n-1)\ln \lambda + \ln \lambda = n \ln \lambda$$
     $\mathscr{P}$ est donc initialisée et héréditaire, par conséquent pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\ln \lambda^n = n \ln \lambda$.
     Si désormais $n < 0$, alors $-n > 0$ et :
     $$\ln \lambda^{n} = \ln \frac{1}{\lambda^{-n}} = -\ln \lambda^{-n} = -(-n \ln \lambda) = n \ln \lambda$$
3. On a : $\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \ln \lambda + \ln \frac{1}{\mu} = \ln \lambda - \ln \mu$
4. $\ln \lambda = \ln \sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda} = \ln \sqrt{\lambda} + \ln \sqrt{\lambda} = 2 \ln \sqrt{\lambda} \Longrightarrow \ln \sqrt{\lambda} = \frac{1}{2}\ln \lambda$

Exercice 2.

1. Ecrire à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres $A = \ln 144$ et $B = \ln 81 + \ln 3\sqrt{3}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $ln(5-x) > 2\ln(x+1)$.
3. Une voiture perd en moyenne 15% de valeur en un an. Au bout de combien d'années a-t-elle perdu la moitié de sa valeur ?

IV. Continuité et dérivabilité, limites

IV.1. Continuité et dérivabilité

Théorème 4.

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est :

$$(\ln \lambda)' = \frac{1}{\lambda}$$

Preuve

Admettons dans un premier temps que ln est dérivable sur $]0,+\infty[$. Notons provisoirement $\ln'$ sa dérivée. Nous savons juste que $\exp(\ln x) = x$. En dérivant membre à membre on obtient $\ln' x \times \exp(\ln x) = 1$ et donc $\ln' x = 1/x$...Bingo ! Démontrons que le logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ (ce qui impliquera qu'elle est continue sur $]0;+\infty[$) en trois étapes :

1. On montre que ln est continue en 1 i.e que $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0$
2. Montrons que ln est dérivable en 1 (et que donc sa dérivée vaut 1) i.e que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = 1$
3. Enfin concluons en montrant que ln est dérivable pour tout $a > 0$ (et que donc sa dérivée vaut $\dfrac{1}{a}$) i.e que
$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \frac{1}{a}$$

1. Comme pour tout $x > 1$, on a $e^x \geq x+1$ on a aussi $0 < \ln x \leq x-1$, d'après le théorème des gendarmes la limite lorsque x tend vers 1^+ de $\ln x$ vaut $0 = \ln 1$
Si $x \in]0;1[$, on a alors $\ln x < 0 \Longleftrightarrow \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$, et donc en utilisant le résultat précédent pour $1/x > 1$ on a aussi :
$$0 < \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1$$
d'après le théorème des gendarmes lorsque x tend vers 1^- on obtient alors :
$$\lim_{x\to 1^-} \ln x = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 1} \ln x = 0 = \ln 1$$
Ainsi ln est continue en 1.
2. Posons $\mathrm{H} = \ln(1+h) \Longleftrightarrow e^{\mathrm{H}} = 1+h \Longleftrightarrow h = e^{\mathrm{H}} - 1$.
La fonction ln étant continue en 1, lorsque h tend vers 0, $\ln(1+h)$ c'est-à-dire H tend vers 0. D'où, en se rappelant le résultat $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h} = 1$, :
$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = \lim_{\mathrm{H}\to 0} \frac{\mathrm{H}-0}{e^{\mathrm{H}}-1} = 1$$
La fonction ln est donc dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est 1.
3. Soit $a \in]0;+\infty[$. Démontrons que la fonction ln est dérivable en a.
$$\frac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \frac{\ln \frac{a+h}{a}}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)}{h} = \frac{1}{a} \times \frac{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}}$$
Posons $\mathrm{H} = \dfrac{h}{a}$ on a alors : $\dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{\ln(1+\mathrm{H})}{\mathrm{H}}$ Lorsque h tend vers 0, $\mathrm{H} = \dfrac{h}{a}$ tend vers 0, et d'après la partie 2.
$$\lim_{\mathrm{H}\to 0} \frac{\ln(1+\mathrm{H})}{\mathrm{H}} = 1 \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \frac{1}{a}$$

Propriété 1.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive alors :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Preuve

On sait que

$$(v \circ u)' = v'(u) \times u'$$

On applique ce résultat pour $v = \ln$.

Exercice 1 :

1. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

   (a) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$ sur $]3;+\infty[$.

   (b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ sur $]2;+\infty[$

2. Etudier le sens de variation de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$

IV.2. Limites en aux bornes de son ensemble de définiton

Théorème 5. (*Limites aux bornes de son ensemble de définition* $]0;+\infty[$)

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Ainsi la représentation graphique de la fonction ln admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ mais n'admet pas d'asymptote horizontale.

Preuve

Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^{+*}$. Posons $\mathrm{A} = e^{\mathrm{M}}$, comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a :

$$\forall x > \mathrm{A} \Longrightarrow \ln x > \ln \mathrm{A} = \mathrm{M}$$

Quelque soit le réel M, il existe un rang au delà duquel $\ln x \geq \mathrm{M}$, ce qui prouve que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \ln x = -\infty$$

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln \frac{3x+5}{x-1}$$

IV.3. Autres limites faisant intervenir le logarithme népérien

Théorème 6. (*Autres limites faisant intervenir le logarithme népérien*)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

Preuve

1. Commencons par démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ en utilisant le fait que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$
Posons $\mathrm{X} = e^x \iff \ln \mathrm{X} = x$ on a alors
$$\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \frac{\ln \mathrm{X}}{\mathrm{X}} = 0$$
2. On en déduit alors pour $n \geq 2$ que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln x}{x} = 0$$
car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
3. En posant $\mathrm{X} = \ln x$ on a $e^{\mathrm{X}} = x$, lorsque x tend vers 0^+ alors X tend vers $-\infty$ et :
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{\mathrm{X}\to-\infty} e^{\mathrm{X}} \times \mathrm{X} = 0$$
4. On en déduit alors pour $n \geq 2$ que
$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1} \times x\ln x = 0$$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1}$
Il s'agit de la limite du taux d'accroissement de ln en 1. Comme ln est dérivable en 1 et de dérivée 1 en 1, on obtient le résultat voulu.

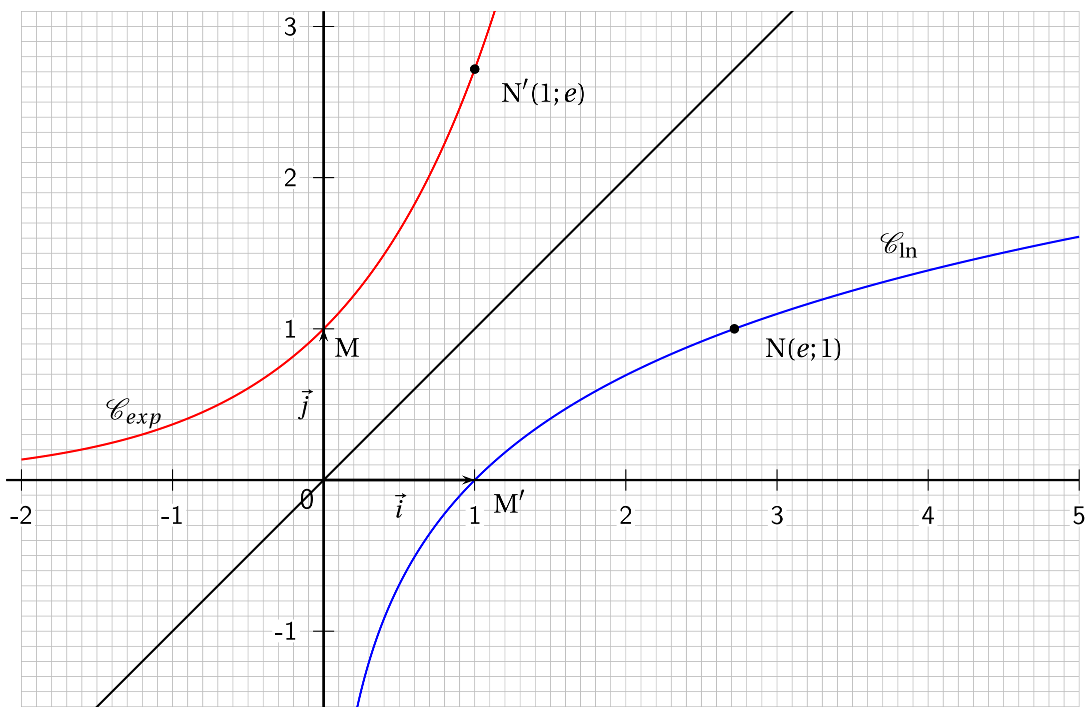
Exercice 4. Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} \ln x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

IV.4. Représentation graphique

Les courbes $\mathscr{C}_{exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (cf DM 7), par conséquent, on peut tracer la courbe représentative de la fonction $\ln$:

x	0		1		e		$+\infty$
Signe de $\dfrac{1}{x}$				$+$			
Variation de $\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



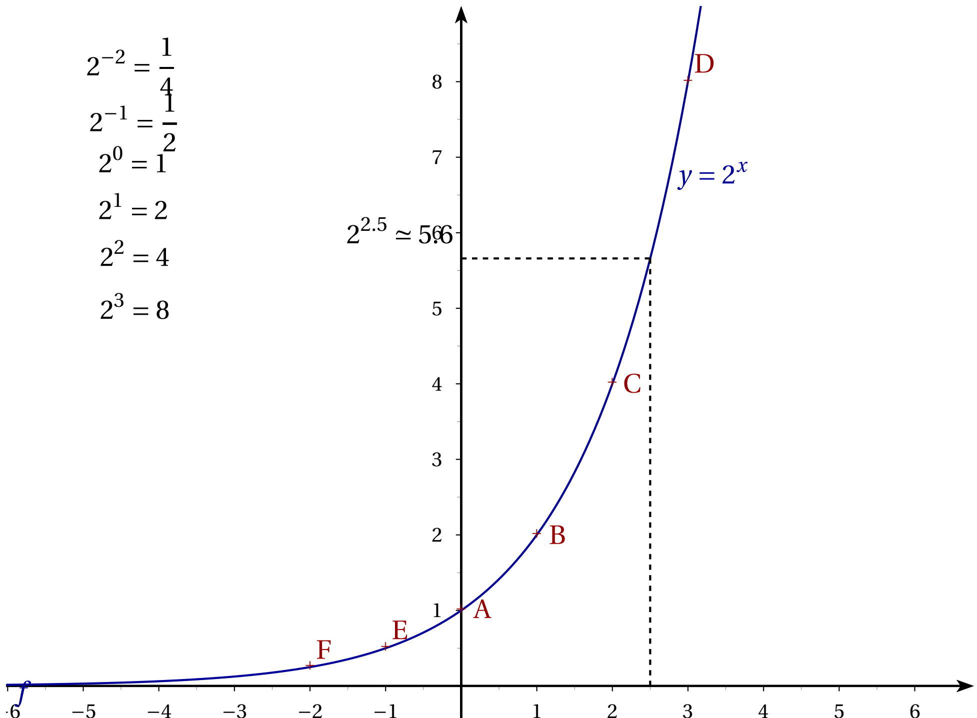
V. TP

V.1. TP 1 - Etude des fonctions exponentielles de base λ

V.1.a. Définition

Comment définir $2^{2.5}$?

Une première approche serait de construire une ébauche de la représentation graphique de l'hypotéthique fonction $f : x \longmapsto 2^x$, en utilisant nos connaissances sur les puissances entières de 2.



En traçant harmonieusement la courbe de la fonction f on conjecture que :

$$2^{2.5} \simeq 5.6$$

Constat : Soit $\lambda > 0$ et n un entier relatif. On sait que

$$\ln \lambda^n = n \ln \lambda \Longrightarrow \lambda^n = e^{\ln \lambda^n} = e^{n \ln \lambda}$$

De même, comme $\ln e = 1$, si x est un réel quelconque, on a $e^x = e^{x \ln e}$

Ces constatations conduisent à la définition suivante :

Définition 2.

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout réel x, on pose

$$\lambda^x = e^{x \ln \lambda}$$

Exemple :

On retrouve $2^{2,5} = e^{2,5 \ln 2} \simeq 5,66$

Exercice 1. Soit $\lambda > 0$, on rappelle que pour tout réel x on a :

$$\lambda^x = e^{x\ln\lambda}$$

PARTIE A. **Racine n–ième d'un nombre réel strictement positif**

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ on a :

$$\lambda^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda}$$

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\left(\lambda^{\frac{1}{n}}\right)^n = \lambda$$

3. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier ses variations puis montrer que l'équation $x^n = \lambda$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.

Définition 3.

Pour tout réel positif λ et pour entier naturel non nul n, il existe un unique réel positif x tel que $x^n = \lambda$.
Ce réel est noté $\sqrt[n]{\lambda}$ et s'appelle la racine n-ième du réel positif λ. On a :

$$\sqrt[n]{0} = 0 \qquad \text{et, pour } \lambda > 0,\ \sqrt[n]{\lambda} = \lambda^{\frac{1}{n}}$$

PARTIE B. **Propriétés des puissances**

(a) Démontrer que pour les réels $\lambda > 0$ et $\lambda' > 0$ et pour tous les réels x et x' on a :

i. $\ln\lambda^x = x\ln\lambda$

ii. $(\lambda^x)^{x'} = \lambda^{xx'}$

iii. $\lambda^{x+x'} = \lambda^x\lambda^{x'}$

iv. $(\lambda\lambda')^x = \lambda^x\lambda'^x$

v. $\lambda^{x-x'} = \dfrac{\lambda^x}{\lambda^{x'}}$

vi. $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda'}\right)^x = \dfrac{\lambda^x}{\lambda'^x}$

4. Simplifier l'écriture du réel

$$A = \sqrt[3]{162} \times \sqrt[4]{216}$$

V.2. TP2 - Le logarithme décimal

Partie I : Etude de la fonction logarithme décimal.
On considère la fonction log, aussi appelé logarithme décimal, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

1. Déterminer les limites de log en $+\infty$ et en 0^+. Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote.
2. Etudier les variations de la fonction log. Dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$ on a :

$$\log(xy) = \log x + \log y \qquad \text{et} \qquad \log\frac{x}{y} = \log x - \log y$$

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\log(x^n) = n \log x$$

Partie II : Ecriture Scientifique (caractéristique et mantisse), et logarithme décimal
Tout nombre réel x strictement positif admet une écriture scientifique de la forme :

$$x = a \times 10^n \qquad \text{avec } a \in [1;10[\text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

1. Donner l'écriture scientifique de 1450, puis de $0,000314$.
2. Montrer que $\log(1450) = 3 + \log(1,45)$. Proposer une écriture semblable pour $\log(0,000314)$.
3. Montrer qu'il existe un réel $a \in [1;10[$ et un entier n tels que

$$\log x = n + \log a$$

Remarque :

- Puisque la fonction log est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, pour tout réel a compris entre 1 et 10 (exclu), $\log(a)$ est compris entre 0 et 1. L'entier relatif n est donc la partie entière de $\log(x)$ et $\log(a)$ la partie décimale à ajouter à n pour obtenir $\log(x)$.
- La partie entière de $\log(x)$ est appelée la **caractéristique** du log.
- La partie décimale à rajouter à la partie entière s'appelle la **mantisse**.

Partie III : Effectuer sans calculatrice un calcul en utilisant une table du logarithme décimal

1. Montrer que $\log(1,5) = \log 15 - 1$. En déduire à l'aide de la table la valeur à 10^{-4} près de $\log 1,5$.
2. En utilisant un raisonnement analogue, lire sur la table la valeur à 10^{-4} près de $\log 3,2$.
3. En utilisant l'égalité $\log(xy) = \log x + \log y$, montrer que : $\log(1,5 \times 3,2) \simeq 0,6812$.
4. En utilisant la table des log, en déduire que $1,5 \times 3,2 \simeq 4,8$.
5. (a) A l'aide de la table des logarithmes montrer que :

$$\log \sqrt[3]{50} \simeq 0,56$$

   (b) Constater, à l'aide de la table des logarithmes que $\log 37 - 1 \simeq 0,56$.
   (c) En déduire que $\sqrt[3]{50} \simeq 3,7$.
6. En utilisant une démarche similaire, démontrer à l'aide de la table du logarithme décimal que :

$$\sqrt[4]{70} \simeq 2,9$$

n	$\log n$	n	$\log n$	n	$\log n$	n	$\log n$	n	$\log n$
1	0	21	1.32221929	41	1.61278386	61	1.78532984	81	1.90848502
2	0.301029996	22	1.34242268	42	1.62324929	62	1.79239169	82	1.91381385
3	0.477121255	23	1.36172784	43	1.63346846	63	1.79934055	83	1.91907809
4	0.602059991	24	1.38021124	44	1.64345268	64	1.80617997	84	1.92427929
5	0.698970004	25	1.39794001	45	1.65321251	65	1.81291336	85	1.92941893
6	0.77815125	26	1.41497335	46	1.66275783	66	1.81954394	86	1.93449845
7	0.84509804	27	1.43136376	47	1.67209786	67	1.8260748	87	1.93951925
8	0.903089987	28	1.44715803	48	1.68124124	68	1.83250891	88	1.94448267
9	0.954242509	29	1.462398	49	1.69019608	69	1.83884909	89	1.94939001
10	1	30	1.47712125	50	1.69897	70	1.84509804	90	1.9542251
11	1.041392685	31	1.49136169	51	1.70757018	71	1.85125835	91	1.95904139
12	1.079181246	32	1.50514998	52	1.71600334	72	1.8573325	92	1.96378763
13	1.113943352	33	1.51851394	53	1.72427587	73	1.86332286	93	1.96848295
14	1.146128036	34	1.53147892	54	1.73239376	74	1.86923172	94	1.97312785
15	1.176091259	35	1.54406804	55	1.74036269	75	1.87506126	95	1.97772361
16	1.204119983	36	1.5563025	56	1.74818803	76	1.88081359	96	1.98227123
17	1.230448921	37	1.56820172	57	1.75587486	77	1.88649073	97	1.98677173
18	1.255272505	38	1.5797836	58	1.76342799	78	1.8920946	98	1.99122608
19	1.278753601	39	1.59106461	59	1.77085201	79	1.89762709	99	1.99563519
20	1.301029996	40	1.60205999	60	1.77815125	80	1.90308999	100	2