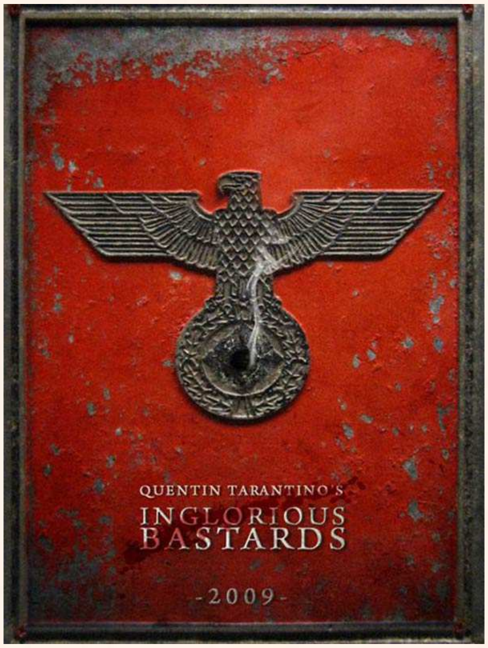
Chapitre 10

Intégration

Hors Sujet



Titre : « Inglourious Basterds »
Auteur : Quentin Tarantino
Présentation succinte de l'auteur : Inglourious Basterds (Le Commando des bâtards au Québec) est un film américain uchronique réalisé par Quentin Tarantino, sorti le 19 août 2009 en France. Il a été présenté en compétition officielle au Festival de Cannes 2009.

Dans la France occupée, Shosanna Dreyfus (Mélanie Laurent) assiste à l'exécution de sa famille juive par le colonel de la SS Hans Landa (Christoph Waltz). Shosanna parvient à s'échapper et se retrouve à Paris où elle se construit une nouvelle identité en tant que gérante d'un cinéma. Ailleurs en Europe, le lieutenant Aldo Raine (Brad Pitt) forme un groupe de soldats juifs spécialisés dans des actions ciblées et risquées. Connus sous le nom de « The Basterds », Raine et ses hommes font équipe avec l'actrice allemande et agent double Bridget von Hammersmark (Diane Kruger) pour tenter d'assassiner les dirigeants du Troisième Reich. Ils croisent alors la route de Shosanna qui mène sa propre vendetta.

« Les films sur l'holocauste montrent toujours les juifs en tant que victimes... je veux montrer quelque chose de différent »

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

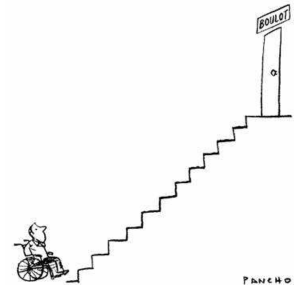
L'essentiel :

- Connaitre le sens de variation, la dérivée, les limites et la représentation graphique de la fonction ln
- Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées. En particulier connaître les primitives de $u'e^u$, $\dfrac{u'}{u}$ et $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$
- Calculer une intégrale.
- Utiliser le calcul intégral pour calculer une aire.
- Encadrer une intégrale.
- Pour une fonction monotone positive, mettre en oeuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 10

Intégration

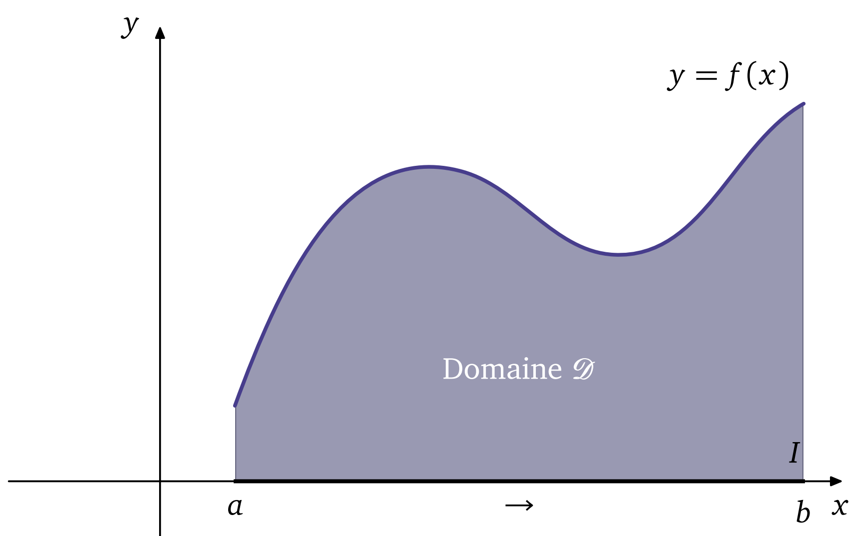


Résumé

Le calcul intégrale est l'outil permettant de déterminer l'aire de forme géométrique nouvelle. On verra que l'aire sous la courbe d'une fonction est lié à la notion de dérivée, il s'agit en quelque sorte du problème inverse puisqu'on est ramené à la recherche de primitive pour calculer cette aire. Le rapport avec la dérivée n'est pas des plus étonnants, puisqu'il mesure le degré de courbe de la courbe en tout point, information qui parait nécessaire pour calculer l'aire sous cette courbe.

Dans tout le chapitre on considère un plan P muni dun repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

I. Introduction - La notation $\int_a^b f(x)dx$

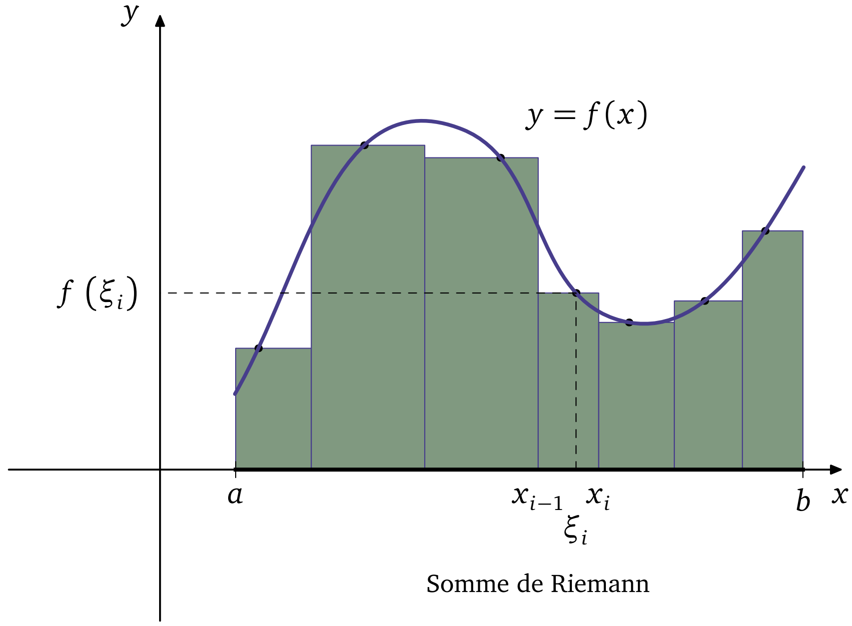


But : Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$

On cherche donc un moyen pour déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ définit par :

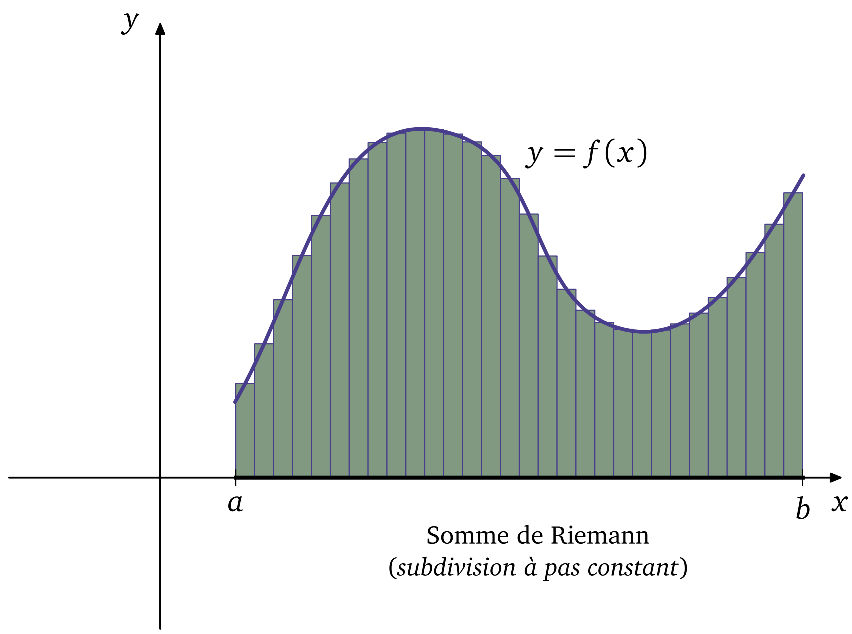
$$\mathscr{D}=\{\mathrm{M}(x;y)\in\mathscr{P} \text{ tel que } a\leq x\leq b \text{ et } 0\leq y\leq f(x)\}$$

L'idée de Riemann est alors la suivante, approchée cette aire en calculant l'aire de rectangle comme-suit :



Somme de Riemann

Affinons encore un peu plus la démarche de Riemann, en considérant en divisant l'intervalle $[a;b]$ en 30 subdivisions identiques :



Somme de Riemann
(*subdivision à pas constant*)

Avec une telle subdivision, la somme des aires de chacun des rectangles vert est « visiblement »très proche de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ que l'on note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (on verra pourquoi on adopte une telle notation peu après). On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{30} \frac{b-a}{30} \times f(\zeta_i)$$

En effet la longueur d'une subdivision est $\dfrac{b-a}{30}$, et elle correspond à la largeur de chacun des rectangles, la longueur étant donné par l'image du réel $f(\zeta_i)$.
Riemann s'aperçoit que si l'on divise l'intervalle $[a;b]$ en n subdivision avec n très grand alors on alors une

valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ plus précise, ainsi on est amené à écrire l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\times f(\zeta_i)$$

Remarque : On peut maintenant comprendre la notation choisit par les mathématiciens :

- ⇝ lorsque n tend vers $+\infty$ chaque subdivision sur l'axe des abscisses est infiniment petite est vaut $\dfrac{b-a}{n}$, pour le symboliser on note dx.
- ⇝ lorsque n tend vers $+\infty$ on considère donc une somme infinie, que l'on note $\displaystyle\int_a^b$.
- ⇝ Comme chaque subdivision est infiniment petite, on considère $f(\zeta_i)$ où ζ_i prend toutes les valeurs entre a et b.

Ainsi on écrit logiquement :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\times f(\zeta_i) = \int_a^b f(x)dx$$

II. Définition

II.1. Unité d'aire et domaine délimité par une courbe

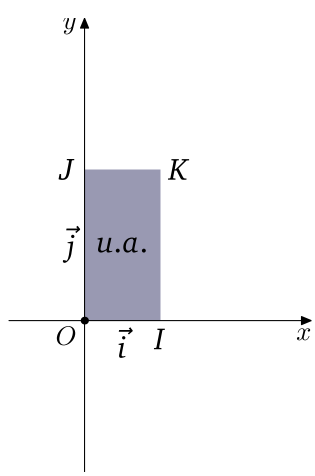
Définition 1 :

Dans le plan P muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points I, J et K définis par :

$$\overrightarrow{OI}=\vec{i} \qquad \overrightarrow{OJ}=\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OK}=\vec{i}+\vec{j}$$

L'aire du rectangle OIKJ représente une unité d'aire, on note :

$$\mathscr{A}(\text{OIKJ}) = 1 \text{ u.a}$$



Remarques :

- ⇝ Lorsque le repère est orthonormal le rectangle OIKJ est un carré.

⇝ Si par exemple $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 3$ cm alors une unité d'aire correspond à 6 cm^2 i.e

$$1 \text{ u.a} = 6 \text{ cm}^2$$

II.2. Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment $[a;b]$

Définition 2 :

On considère une fonction f continue et positive sur le segment[a] $[a;b]$.
On appelle intégrale de f de a à b l'aire, exprimé en u.a, du domaine $\mathscr{D}$ suivant :

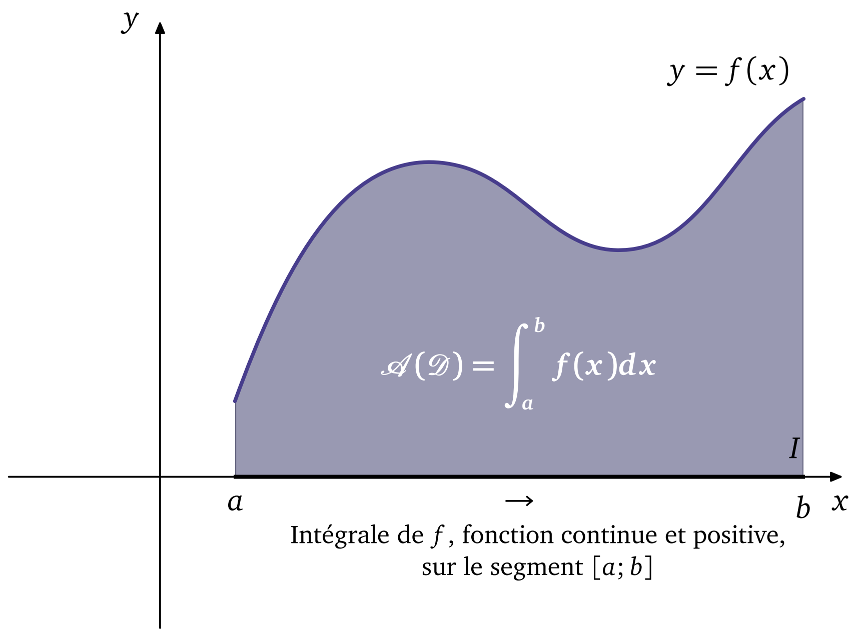
$$\mathscr{D} = \{\mathrm{M}(x;y) \in \mathscr{P} \text{ tel que } a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$\mathscr{D}$ est le domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ On note

$$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b f(x)dx$$

Les réels a et b s'appellent les bornes de l'intégrale.

a. Un segment est un intervalle fermé borné



Intégrale de f, fonction continue et positive, sur le segment $[a;b]$

Remarques :

⇝ La variable x figurant dans l'intégrale est « muette » ; on aurait pu tout aussi bien la noter par n'importe quelle autre lettre i.e

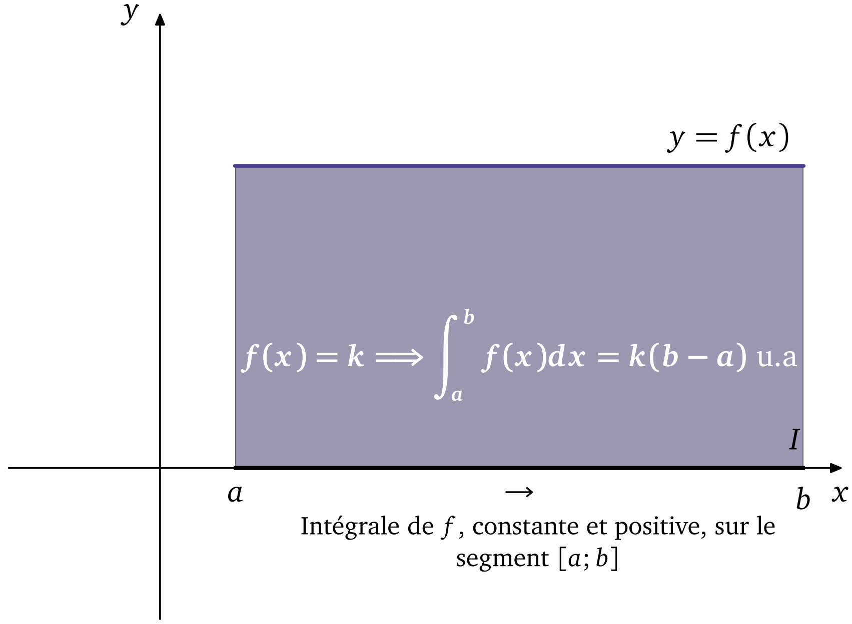
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

⇝ L'aire de $\mathscr{D}$ est de mesure finie. En effet, f est continue sur le segment $[a;b]$ donc majorée. Il existe donc un rectangle contenant $\mathscr{D}$

II.3. Premiers exemples

II.3.a. Cas d'une fonction constante positive

On considère une fonction f constante égale à $k \geq 0$. Si le repère est orthonormal avec $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1$ cm, alors :



Intégrale de f, constante et positive, sur le segment $[a;b]$

On a simplement appliqué la formule donnant l'aire d'un rectangle : $\ell \times \mathrm{L}$.
Si $k = 0$, on a :

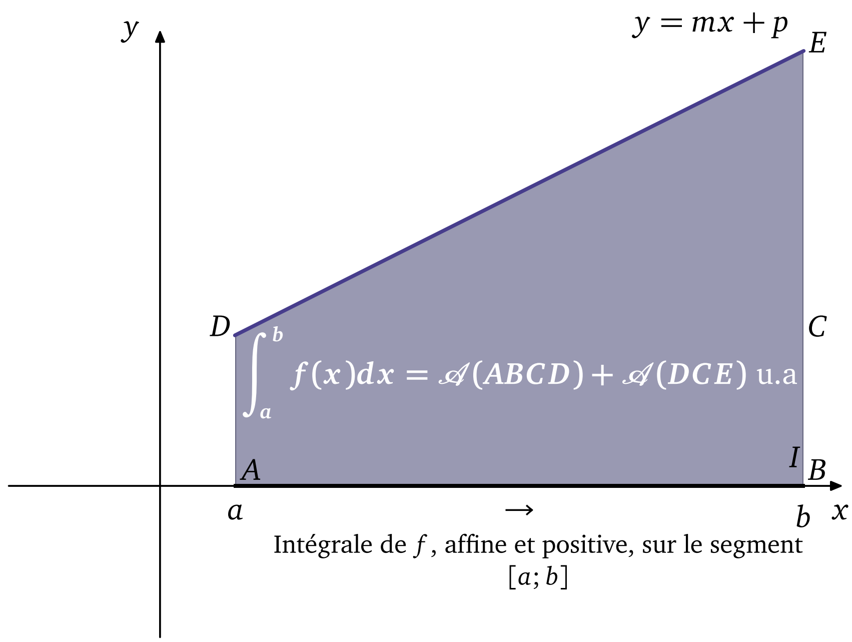
$$\int_a^b f(x)dx = 0 \text{ u.a}$$

Si $k = 1$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = b - a = \text{ longueur du segment } [a;b]$$

II.3.b. Cas d'une fonction affine

On considère une fonction affine f positive sur le segment $[a;b]$ et définie par $f(x) = mx + p$



Intégrale de f, affine et positive, sur le segment $[a;b]$

On décompose l'aire du trapèze ABED comme la somme des aires du rectangle ABCD et CDE, on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \mathscr{A}(\text{ABCD}) + \mathscr{A}(\text{CDE}) = f(a)\times(b-a) + \frac{f(a)+f(b)}{2} \text{ u.a}$$

Application :

Calculons $\int_1^8 \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}dx$.
On a $f(1)=2$ et $f(8)=5,5$, par conséquent :

$$\int_1^8 \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}dx = 2\times 6+\frac{2+5,5}{2} = 12+\frac{15}{4} = \frac{48+15}{4} = \frac{63}{4} = 15,75 \text{ u.a}$$

Si de plus, le repère est orthogonal avec $\|\vec{i}\|=2$ cm et $\|\vec{j}\|=1$ alors 1 u.a=2 cm^2 et donc :

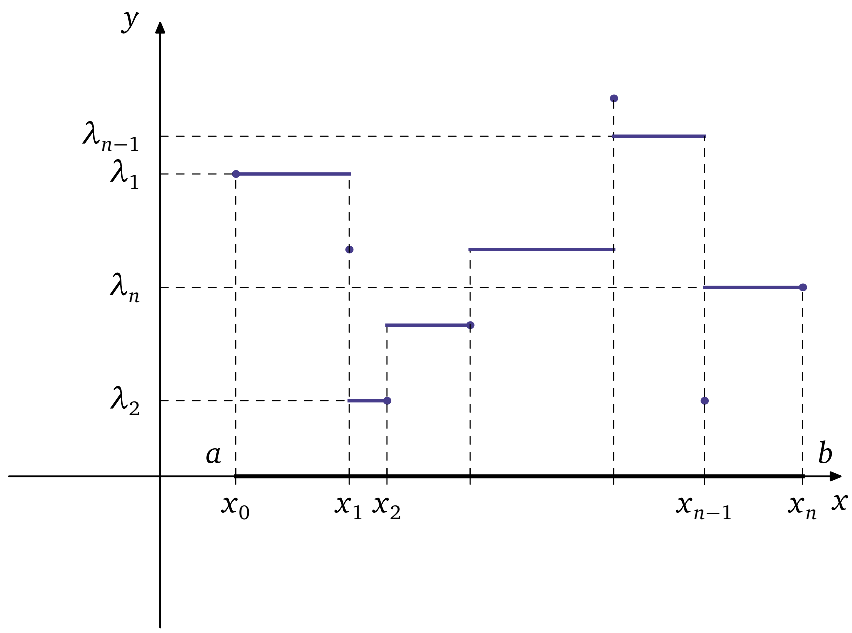
$$\int_1^8 \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}dx = 15,75\times 2 = 31,5 \text{ cm}^2$$

II.3.c. Cas d'une fonction en escalier

Il s'agit des fonctions pour lesquelles il existe des réels x_0, x_1, ..., x_n vérifiant :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

tels que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_i;x_{i+1}[$ $(0\leq i\leq n-1)$. L'ensemble $\{x_0;x_1;\ldots;x_n)$ est appelé une subdivision adaptée à f.



En notant λ_i la valeur constante de f sur $]x_i;x_{i+1}[$, on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{i=n-1}(x_{i+1}-x_i)\lambda_i$$

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par :

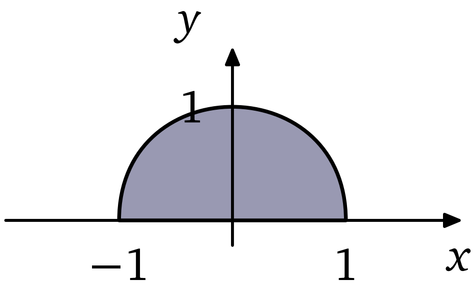
$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Vérifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 qui est situé dans le demi-plan des ordonnées positives.

En déduire que

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

Solutions :

1. 

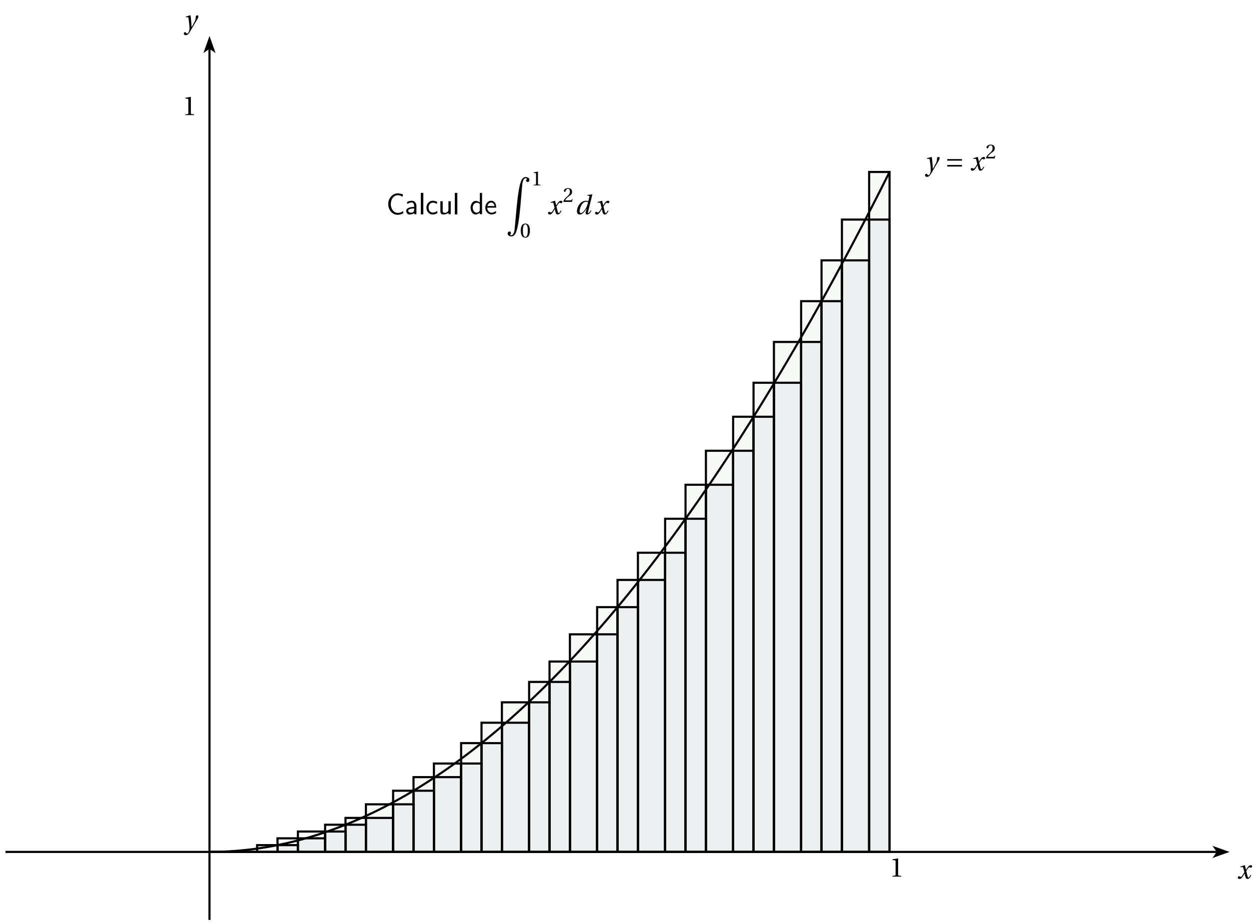
2. L'aire d'un cercle de rayon 1 valant π, celle du quart de cercle vaut elle $\frac{\pi}{4}$ d'où

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

II.3.d. Quadrature de la parabole

On se propose de déterminer $\int_0^1 x^2\,dx$.

Découpons le segment $[0;1]$ en n intervalle égaux et considérons les deux suites de rectangles comme dans le schéma suivant (une qui minore l'aire sous la courbe et une qui majore l'aire sous la courbe) :



Quadrature de la parabole

Notons s_n l'aire des rectangles minorant $\int_0^1 x^2 dx$ et S_n l'aire des rectangles majorant l'aire $\int_0^1 x^2 dx$. On alors :

$$s_n \leq \int_0^1 x^2 dx \leq S_n$$

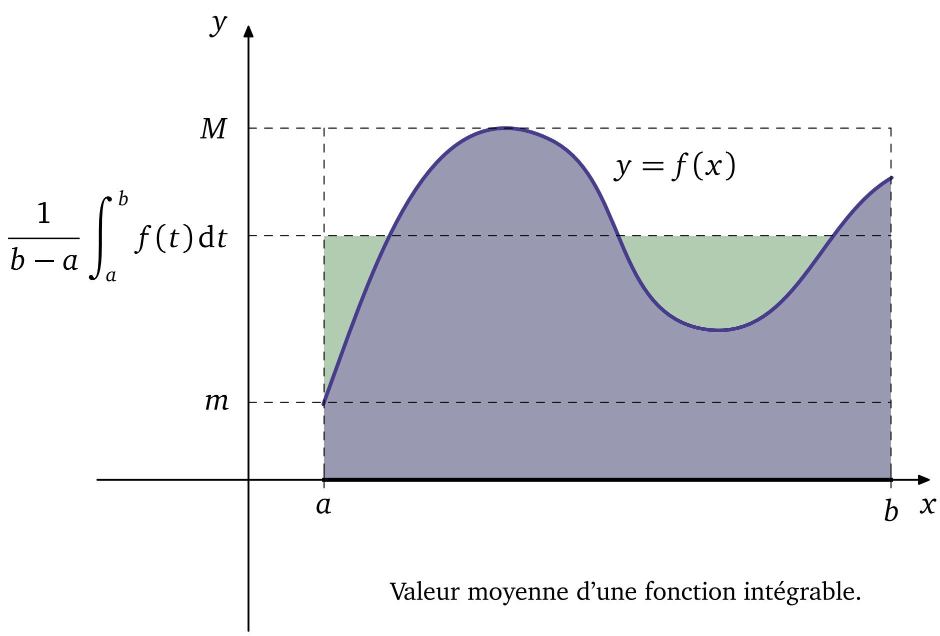
1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $s_n = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n = s_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$
3. Démontrer, par récurrence, que : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de (S_n).
5. En déduire que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

II.4. Valeur Moyenne

Définition 3 :

Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a;b]$.
La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel μ :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



Valeur moyenne d'une fonction intégrable.

Comme $\int_a^b \mu dx = \mu(b-a)$ (en effet il s'agit de l'aire du rectangle de hauteur μ et de largeur $b-a$.
Compte tenu de la définition de μ on a alors

$$\int_a^b \mu dx = \mu(b-a) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \times (b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

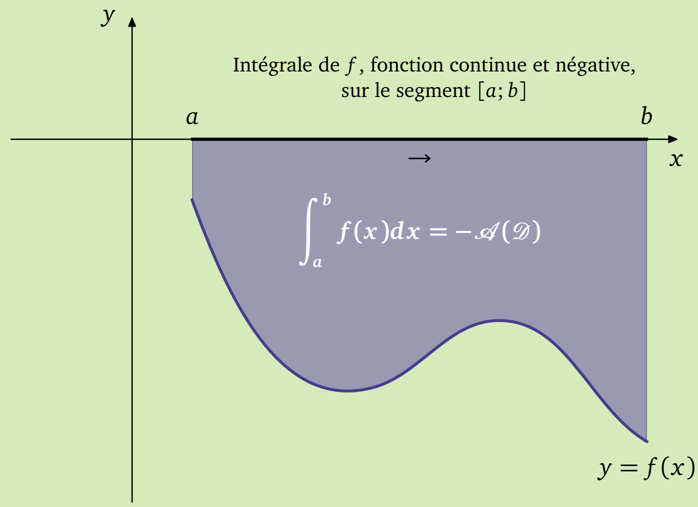
Ainsi l'aire sous la courbe de f entre $[a;b]$ est égale à l'aire du rectangle dont les dimensions sont $b-a$ et μ (valeur moyenne de f).

II.5. Extension aux fonctions de signe quelconque

Définition 4 :

On considère une fonction f continue sur le segment $[a;b]$.
On appelle intégrale de f de a à b le nombre ainsi défini :

1. Si f est négative sur $[a;b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\mathscr{A}(\mathscr{D}) = -\int_a^b |f(x)|\,dx$



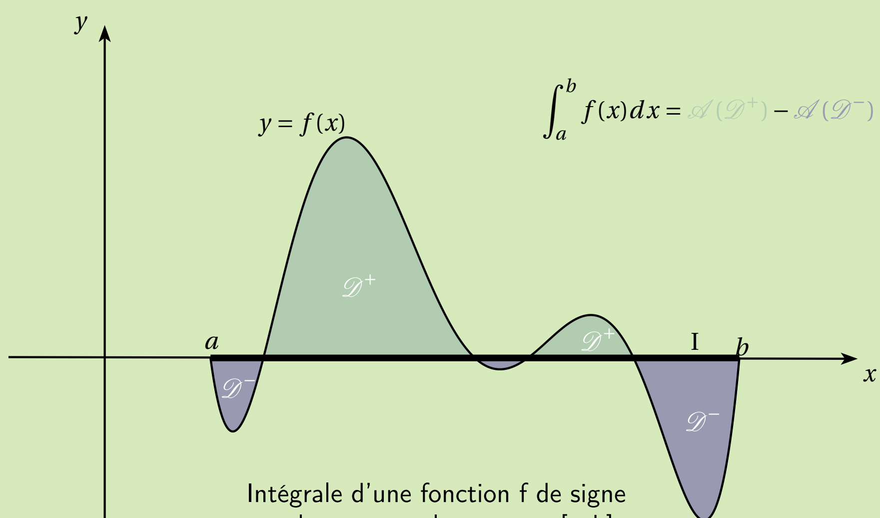
Intégrale de f, fonction continue et négative, sur le segment $[a;b]$

2. Si f est de signe quelconque sur $[a;b]$, on définit deux nouvelles fonctions :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi définit f^+ est positive et f^- est négative et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int f^-(x)dx$

En d'autres termes $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ se calcule en comptant positivement l'aire des domaines où f est postive et négativement l'aire des domaines où f est négative.



Intégrale d'une fonction f de signe quelconque sur le segment [a ;b]

Exemple :

Calculons :

$$\int_0^4 3-x dx$$

$3-x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 3$, par conséquent :

$$\int_0^4 3-x dx = \int_0^3 3-x dx + \int_3^4 3-x dx = \frac{3\times 3}{2} - \frac{1\times 1}{2} = 4$$

Remarques :

- La définition de la valeur moyenne reste inchangée.
- L'intégrale d'une fonction continue est donc l'aire algébrique.
- L'objectif de la suite de la leçon est d'établir un moyen simple de calculer cette intégrale, on verra que l'on peut effectuer ce calcul à l'aide des primitives.

III. Propriétés de l'intégrale d'une fonction f sur le segment $[a;b]$.

III.1. Propriétés algébriques

Propriété 1 :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors :

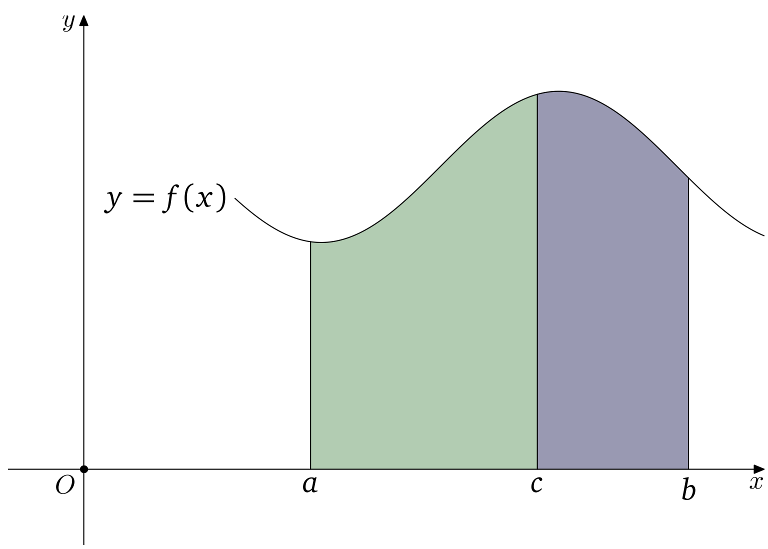
- Pour tout $a \in \mathrm{I}$ on a $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Pour tous a, b et c de I tels que $a < c < b$:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Il s'agit de la relation de Chasles

Preuve

1. L'aire d'un domaine de largeur nulle vaut 0, d'où le résultat.
2. En additionnant les deux aires algébriques représentés par $\int_a^c f(x)dx$ et par $\int_c^b f(x)dx$, on obtient $\int_a^b f(x)dx$, comme dans le représentation ci-dessous



Remarque : Les deux relations précédentes nous autorisent à étendre encore la définition de l'intégrale à des bornes quelconques ; en effet pour rester valable, de façon formelle, la relation de Chasles, nous devons avoir :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0 \Longleftrightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Définition 5 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b.
Si $a \geq b$ on pose :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Propriété 2 : *Admis*

1. **Relation de Chasles (bornes quelconques)**
   Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a, b et c. Alors :
   $$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$
2. **Linéarité de l'intégrale**
   Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b. Alors, pour tous réels α et β :
   $$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Exemple :

Déterminons :

$$\int_0^1 5x^2 + 3xdx$$

D'après la propriété précédente on a :

$$\int_0^1 5x^2 + 3xdx = 5\int_0^1 x^2dx + \int_0^1 3xdx = 5\frac{1}{3} + \int_0^1 3xdx = \frac{5}{3} + \frac{3}{2} = \frac{19}{6} \text{ u.a}$$

On a vu en début de leçon que $\displaystyle\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$

III.2. Intégrales et inégalités

Théorème 1 :

Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$:

1. **Positivité** :

   Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

2. **Ordre** :

   Si $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

3. **Inégalité de la moyenne**

   Si, pour tout x de $[a;b]$ $m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$, alors :

   $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \mathrm{M}(b-a)$$

4. **Inégalité triangulaire**

   On a :

   $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Preuve

1. Comme f est positive sur le segment $[a;b]$, l'intégrale de f entre a et b représente une aire et est donc positive ou nulle.
2. On a $f \leq g \Longleftrightarrow g - f \geq 0$ et grâce à la propriété précédente on a donc :

   $$\int_a^b g(x) - f(x)dx \geq 0$$

   Comme l'intégrale est linéaire on a :

   $$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Longleftrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3. En utilisant 2. comme $m \leq f(x)$ on a :

   $$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \Longleftrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx$$

   De même comme $f(x) \leq \mathrm{M}$ on a :

   $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \mathrm{M}dx = \mathrm{M}(b-a)$$

   Ainsi

   $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \mathrm{M}(b-a)$$

4. Rappel : $-\mathrm{M} \leq f(x) \leq \mathrm{M} \Longleftrightarrow |f(x)| \leq \mathrm{M}$

   On a pour tout $x \in [a;b]$: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ et donc :

   $$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \Longleftrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Exemple :

Etudions la limite de la suite (u_n), avec $u_n = \int_n^{n+1} e^{-x} dx$.
On a pour tout $x \in [n; n+1]$:

$$0 \leq e^{-x} \leq e^{-n}$$

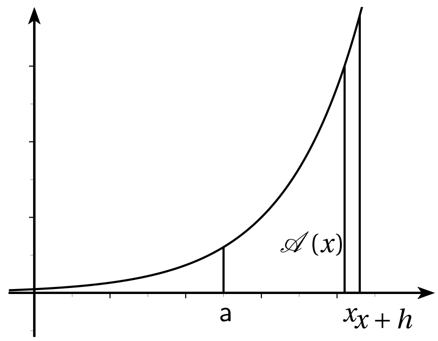
d'où

$$0 \leq u_n e^{-n}(n+1-n) = e^{-n}$$

On en déduit, par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ puisque $\lim_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$

IV. Primitive d'une fonction et théorème fondamental du calcul intégral

IV.1. De l'aire sur une courbe à la recherche de primitive



On considère une fonction continue, positive et croissante sur l'intervalle $[a; b]$, dans ce cas notons $\mathscr{A}(x) = \int_a^x f(t) dt$.
Objectif : Montrons que $\mathscr{A}'(x) = f(x)$.
Pour cela considérons un réel $h > 0$, et intéressons nous à l'aire sous la courbe entre x et $x+h$, on a :

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = \mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)$$

Cette aire est comprise entre deux rectangles de largeur h et de hauteur $f(x)$ et $f(x+h)$, d'où :

$$hf(x) \leq \mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x) \leq hf(x+h) \iff f(x) \leq \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} \leq f(x+h)$$

On obtient alors lorsque h tend vers 0 :

$$f(x) \leq \mathscr{A}'(x) \leq f(x) \iff f(x) = \mathscr{A}'(x)$$

De plus $\mathscr{A}(a) = 0$. Ainsi on est amené à rechercher une fonction dont la dérivée est $f(x)$ et qui s'annule en a.

Application :

$\mathscr{A}(x)=\displaystyle\int_a^x t^2 dt$. On recherche une fonction qui vérifie $\mathscr{A}'(x)=x^2$ et $\mathscr{A}(a)=0$.

On obtient $\mathscr{A}(x)=\dfrac{x^3}{3}+k$ avec $\mathscr{A}(a)=0 \Longleftrightarrow k=-\dfrac{a^3}{3}$.

Par conséquent :

$$\mathscr{A}(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$

Ainsi $\displaystyle\int_2^4 t^2 dt=\frac{4^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{64-8}{3}=\frac{56}{8}$

IV.2. Notion de primitive

Définition 6 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $\mathrm{F}'=f$ sur I

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-2x+\cos x$$

Déterminons (mentalement) une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
La fonction F définie par :

$$\mathrm{F}(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+\sin x$$

convient ; en effet pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction F est dérivable (comme somme de fonctions qui le sont) et

$$\mathrm{F}'(x)=\frac{3x^2}{3}-2x+\cos x=f(x)$$

Remarquons que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{G}(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+\sin x+12$$

convient aussi puisque la dérivée d'une constante est nulle. Par conséquent si f admet une primitive, alors elle en admet une infinité.

IV.3. Ensemble des primitives d'une fonction

Théorème 2 :
Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Soient F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I.
Alors F et G diffèrent d'une constante :

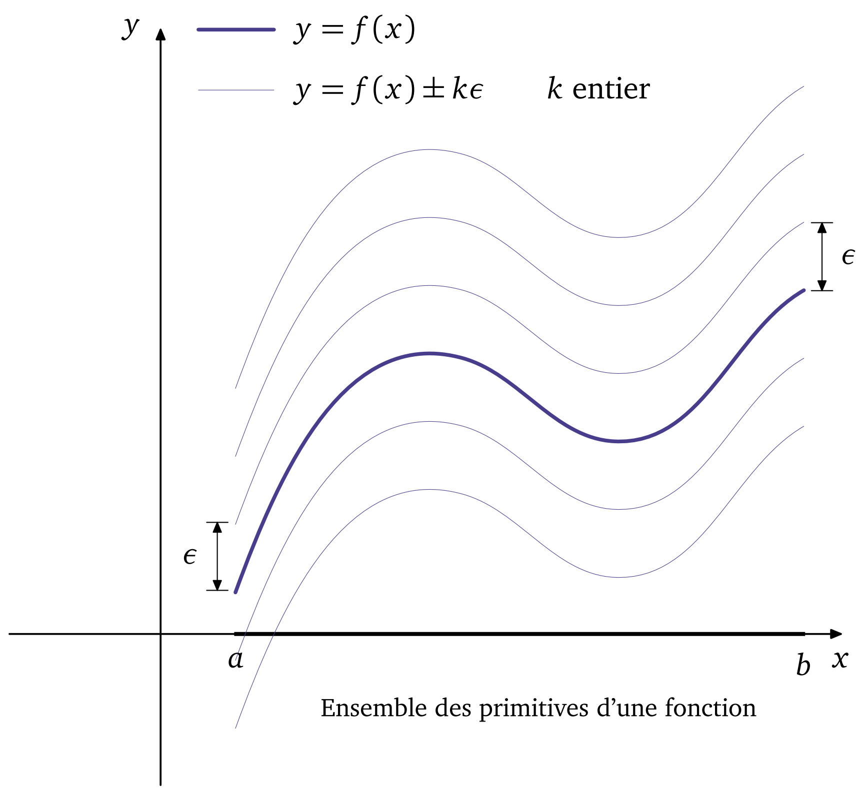
$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+c \qquad (c\in\mathbb{R}) \text{ pour tout } x\in \mathrm{I}$$

Preuve
Puisque F et G sont des primitives de f sur I alors $\mathrm{F}'=\mathrm{G}'=f$ sur I.
Par conséquent

$$\mathrm{F}'-\mathrm{G}'=0 \text{ sur I} \iff (\mathrm{F}-\mathrm{G})'=0 \text{ sur I}$$

Or, les seules fonctions qui ont une dérivée nulle sont les fonctions constantes, donc on a, sur I :

$$\mathrm{F}-\mathrm{G}=c \text{ où } c \text{ est une constante}$$



Ensemble des primitives d'une fonction

IV.4. Primitive vérifiant une « condition initiale »

Théorème 3 :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant des primitives sur I. Soit x_0 et y_0 deux réels. Il existe une unique primitive F de f sur I satisfaisant la condition initiale $\mathrm{F}(x_0) = y_0$

Preuve
Soit G une primitive de f sur I. Alors toutes les primitives de la fonction f sont de la forme

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) + c \qquad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

On a alors $\mathrm{F}(x_0) = \mathrm{G}(x_0) + c$. En choisissant pour $c = y_0 - \mathrm{G}(x_0)$ on obtient l'existence d'une primitive F telle que $\mathrm{F}(x_0) = y_0$ et pour $c \neq y_0 - \mathrm{G}(x_0)$ on aura alors $\mathrm{F}(x_0) \neq y_0$, ainsi il existe une unique primitive satisfaisant la condition $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Trouvons l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{F}(0) = 2$.
Notons que $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, autrement dit $\sqrt{u}$ est une primitive de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
Ici $u(x) = x^2 + 1$ et donc $u'(x) = 2x$, en réécrivant $f(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$, on trouve que F_0 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{F}_0(x) = \sqrt{x^2+1}$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$\mathrm{F}(x) = \sqrt{x^2+1} + c \qquad \text{où } c \text{ est une constante}$$

Comme $\mathrm{F}(0) = 2$ on a

$$\sqrt{0^2+1} + c = 2 \Longleftrightarrow 1 + c = 2 \Longleftrightarrow c = 1$$

Ainsi la primitive cherchée est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = \sqrt{x^2+1} + 1$

Remarques :

- Trouver une primitive d'une fonction f se fait à l'aide des formules de la dérivée que l'on utilise « dans l'autre sens ». Le tableau suivant éclaircira ce point.
- Une question naturelle se pose, une fonction admet-elle toujours des primitives ? La réponse est non en général, en revanche si cette fonction est continue, eh bien c'est l'objet de la suite du cours...

IV.5. Tableaux de primitives

Les résultats de ce tableau s'établissent en vérifiant simplement que l'on a bien $F'(x) = f(x)$ sur l'intervalle considéré.

Fonction f	Primitive F, $c \in \mathbb{R}$	Intervalle I
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ (a et b réel)	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \neq 1$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ sinon
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x$	$\mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$]0; +\infty[$

Exercice 1 :

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes une primitive :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{6x^2 - 5x + 3}{7}$.
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7x(3x^2 + 5)^4$.
3. h définie sur $]2; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{4x^3 + 2}{\sqrt{x^4 + 2x - 3}}$.

Opération sur les primitives lorsque u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I		
Fonction	**Une Primitive**	**Conditions**
$u'+v'$	$u+v$	
ku' (k constante)	ku	
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\dfrac{v'}{v^2}$	$-\dfrac{1}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\mid u \mid)$	si $u \neq 0$ sur I
$u'(v' \circ u)$	$v \circ u$	

Exemple :

Trouvons une primitive F de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

La fonction f est de la forme $u'u$. Donc F est de la forme $\frac{1}{2}u'u^2$:

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$$

Exercice 2 :

Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Calculer $\mathrm{F}'(x)$. Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 3 :

Calculer une primitive de f_i dans les cas suivants :

1. $f_1(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
3. $f_3(x) = \tan x$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$

IV.6. Théorème fondamental du calcul intégral

Nous allons voir maintenant le théorème fondamental du calcul intégral qui aura pour conséquent que toute fonction continue admet des primitives, et qui nous permettra de calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un segment dès lors que l'on connait l'une de ses primitives.

Théorème 4 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in \mathrm{I}$.
La fonction F définie sur I par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0.
Autrement dit : $\mathrm{F}(x_0) = 0$ et F est une fonction dérivable sur I et pour tout réel $x \in \mathrm{I}$ on a $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Preuve

Le fait que $\mathrm{F}(x_0)$ soit nul est évident. Il s'agit de démontrer que F est dérivable sur I et que $\mathrm{F}' = f$ sur I i.e on veut montrer que le taux d'accroissement de F qui vaut $\dfrac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_1)}{x-x_1}$ admet une limite lorsque x tend vers x_1 et que cette limite est précisément $f(x_1)$. C'est parti :

$$\left| \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| = \frac{1}{|x-x_1|} \left| \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt - (x-x_1)f(x_1) \right|$$

Or, $(x-x_1)f(x_1) = \displaystyle\int_{x_1}^{x} f(x_1)dt$ et par la relation de Chasles on a $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x} f(t)dt$ d'où :

$$\left| \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| = \frac{1}{|x-x_1|} \left| \int_{x_1}^{x} f(t)dt - \int_{x_1}^{x} f(x_1)dt \right|$$

D'après la linéarité de l'intégrale on a :

$$\int_{x_1}^{x} f(x)dx - \int_{x_1}^{x} f(x_1)dx = \int_{x_1}^{x} (f(x)-f(x_1))dx$$

Ainsi :

$$\left| \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| = \frac{1}{|x-x_1|} \left| \int_{x_1}^{x} (f(x)-f(x_1))dx \right|$$

Et d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left| \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| \leq \frac{1}{|x-x_1|} \left| \int_{x_1}^{x} |f(t)-f(x_1)|dt \right|$$

Or, f est continue en x_1 donc admet une limite finie en x_1 i.e $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$. Cela signifie que tout intervalle ouvert et centré en $f(x_1)$ contient toutes les valeurs $f(t)$ pour t assez proche de x_1.
Ainsi pour $\epsilon > 0$ et $\mathrm{I} =]f(x_1)-\epsilon; f(x_1)+\epsilon[$ dès lors que t estsuffisament proche de x_1 $f(t) \in \mathrm{I}$ i.e :

$$|f(t)-f(x_1)| \leq \epsilon$$

Ce qui prouve que :

$$\left| \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| \leq \frac{1}{|x-x_1|} \left| \int_{x_1}^{x} \epsilon dt \right| = \frac{1}{|x-x_1|} \times \epsilon |x-x_1| = \epsilon$$

Comme ϵ peut-être choisi aussi petit que l'on veut alors $\lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_1)}{x-x_1} = f(x_1)$. Par conséquent F est dérivable en x_1 et $\mathrm{F}'(x_1) = f(x_1)$, et comme ce raisonnement est valable quelque soit $x_1 \in \mathrm{I}$, F est bien l'unique primitive de f sur I

Corollaire 1 :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Preuve

D'après le théorème précédent, si f est continue sur I alors F définie sur I par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est une primitive de f sur I

Corollaire 2 : Formule de Newton-Leibniz

Soit f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I, alors pour tous a et b de I on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Preuve

Soit G la primitive de f sur I telle que $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ avec $x_0 \in \mathrm{I}$.

On sait que deux primitives F et G diffèrent d'une constante, donc il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a :

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) + k$$

On a alors :

$$\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a) = \int_{x_0}^{b} f(t)dt - \int_{x_0}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{b} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Remarque : On note dans la pratique $[\mathrm{F}(t)]_a^b$

Exemple :

Le corollaire précédent est un résultat puissant qui nous permet de calculer les intégrales (et donc les aires) suivantes avec une grande aisance :

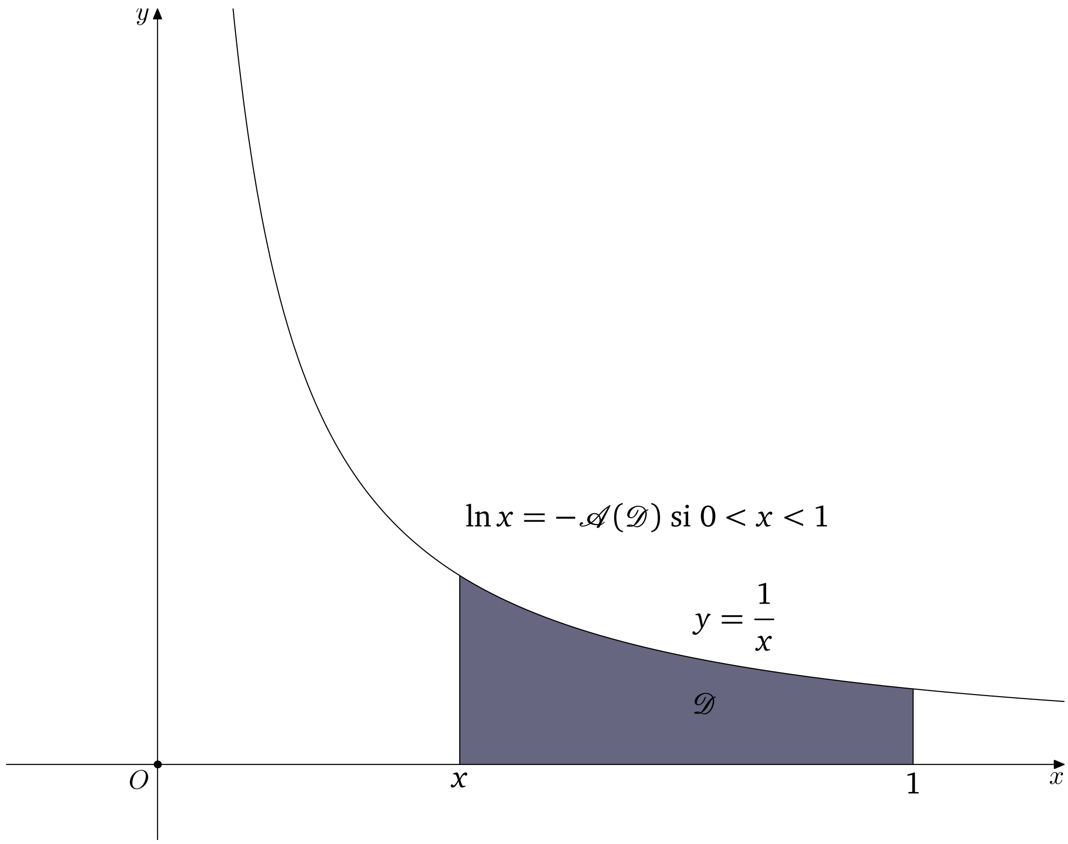
1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$
2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$
3. $\displaystyle\int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1$
4. $\displaystyle\int_x^1 e^t dt = [e^t]_x^1 = e - e^x$
5. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$
6. $\displaystyle\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

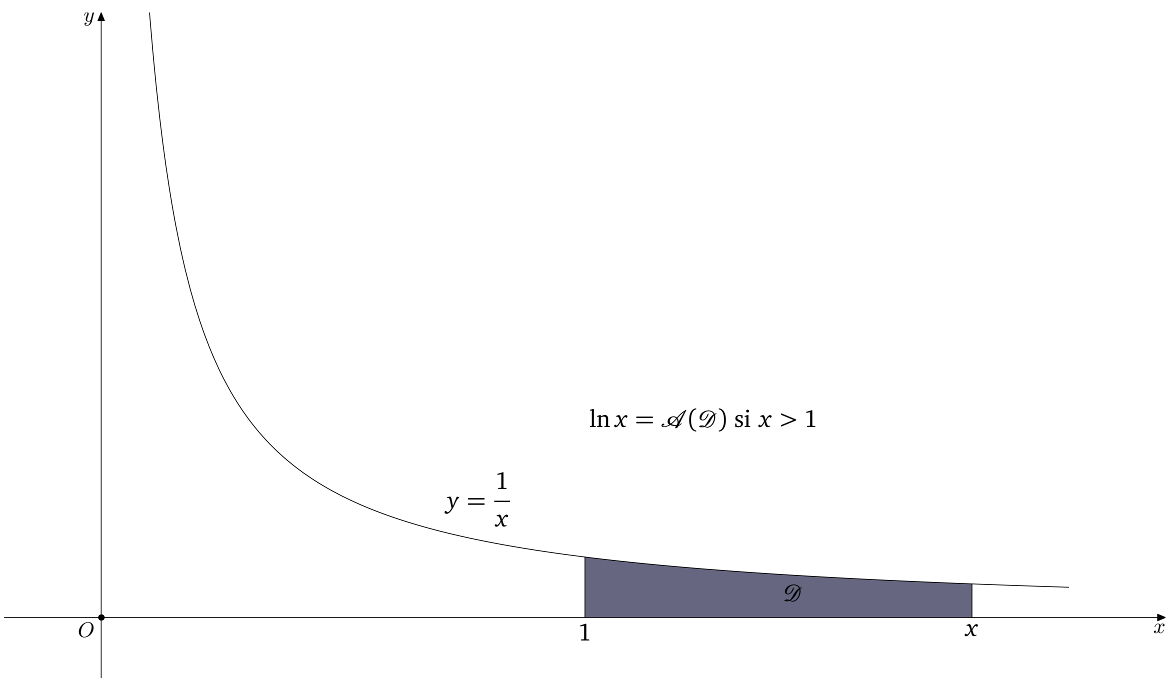
Remarques :

⇝ Le choix de la primitive F choisie n'influe pas sur le résultat de l'intégrale. En effet si F et G sont deux primitives différentes de f, alors les quantités $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ et $\mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a)$ sont identiques.

⇝ On vient de voir dans l'exemple précédent que $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt = [\ln t]_1^x = \ln x = \ln x$.

On peut ainsi définir la fonction logarithme népérien de manière géométrique, comme étant l'aire sous la courbe de la fonction inverse lorsque $x > 1$ ou comme l'opposé de l'aire sous la courbe de la fonction inverse lorsque $0 < x < 1$:


y
$\ln x = -\mathscr{A}(\mathscr{D})$ si $0 < x < 1$
$y = \frac{1}{x}$
$\mathscr{D}$
O
x
1
x


y
$\ln x = \mathscr{A}(\mathscr{D})$ si $x > 1$
$y = \frac{1}{x}$
$\mathscr{D}$
O
1
x
x

V. Intégration par parties

Remarque : On dit qu'une fonction est de classe C^1 sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I.

Théorème 5 :
Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Preuve
On sait que pour tout $t \in [a;b]$ on a :

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$$

En intégrant membre à membre, sur le segment $[a;b]$, on obtient :

$$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Ainsi :

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

i.e :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Exemple :

Calculer $I = \int_0^1 te^t dt$ et $J = \int_1^x \ln t dt$.
Commencons par le calcul de I, pour cela posons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$, dans ce cas on a $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^t$ et donc :

$$I = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - [e^t]_0^1 = e - e + 1 = 1$$

Pour le calcul de J, posons $u(t) = \ln t$ alors $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$ alors $v(t) = t$ et donc :

$$J = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x\ln x - \ln 1 - \int_1^x 1dt = x\ln x - (x-1) = x\ln x - x + 1$$

VI. Calcul d'aires et de volumes

VI.1. Aire entre deux courbes

Propriété 3 : *Calcul de l'aire située entre deux courbes*

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$.
On suppose que $g \leq f$ sur $[a;b]$, alors l'aire du domaine $\mathscr{D}$ défini par :

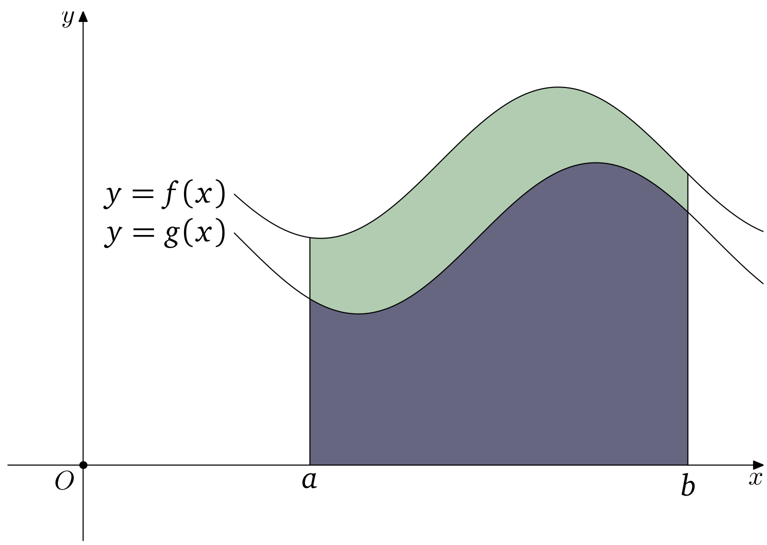
$$\mathscr{D} = \{\mathrm{M}(x;y) \in \mathscr{P} \text{ tels que } a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x)$$

est donnée, en u.a, par :

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

Preuve

Cas où f et g sont positives :

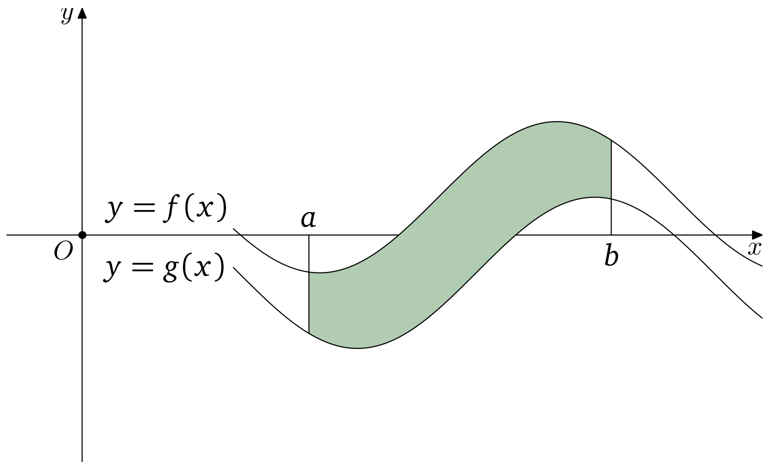


Si les fonctions f et g sont positives le résultat est élémentaire, la différence des aires des domaines délimités par f et g donne bien l'aire entre les deux courbes et vaut :

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

Preuve

Cas où f et g sont de signes quelconques :



Par définition

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$$

Et de la même manière

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g^+(x)dx + \int_a^b g^-(x)dx$$

Notons $F_1 = -\int_a^b f^-(x)dx$ et $F_2 = \int_a^b f^+(x)dx$, dans ce cas F_1 représente l'aire entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ pour la partie de la courbe située sous l'axe des abscisses, inversement F_2 représente l'aire entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ pour la partie de la courbe située au dessus de l'axe des abscisses.

On définit de même $G_1 = -\int_a^b g^-(x)dx$ et $G_2 = \int_a^b g^+(x)dx$. Notons $\mathscr{A}$ l'aire située entre les deux courbes, on a alors :

$$\mathscr{A} = G_1 - F_1 + F_2 - G_2$$

De plus :

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx - \int_a^b g^+(x)dx - \int_a^b g^-(x)dx = F_2 - F_1 - G_2 + G_1 = G_1 - F_1 + F_2 - G_2$$

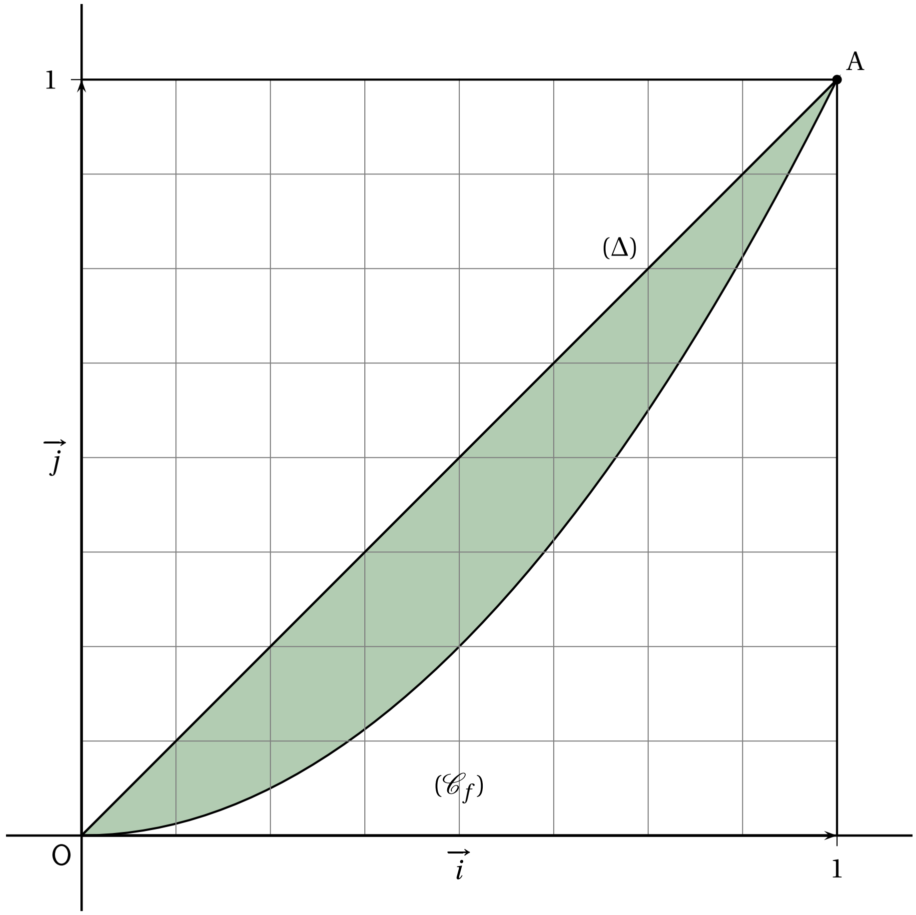
Par conséquent :

$$\int_a^b f(x) - g(x)dx = \mathscr{A}$$

Exemple :

Soit f et g définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Notons que sur $[0;1]$ on a $x \geq x^2$.
L'aire $\mathscr{A}$ entre $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ sur le segment $[0;1]$ est :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 g(x) - f(x)dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ u.a}$$



A
1
(Δ)
$\overrightarrow{j}$
$(\mathscr{C}_f)$
O
$\overrightarrow{i}$
1

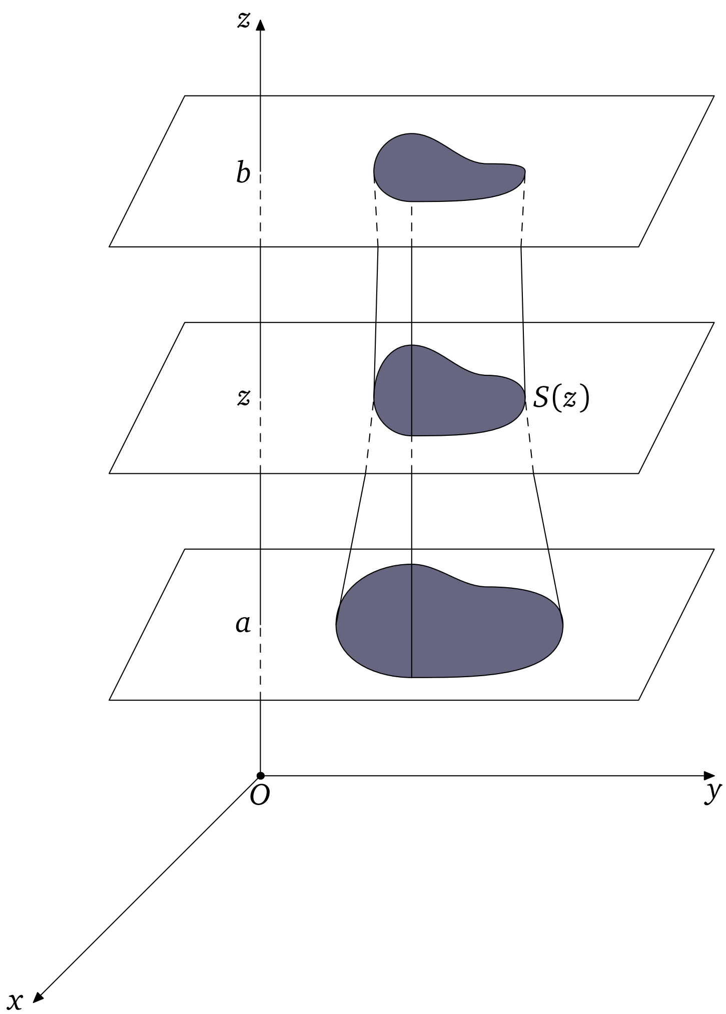
VI.2. Volumes

Théorème 6 :

Dans l'espace munit d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère un solide déliminté par des plans parallèles d'équation $z=a$ et $z=b$. Si la fonction S qui a toute cote z associe l'aire de la section contenue dans le plan perpendiculaire à l'axe $(O;\vec{k})$ est continue sur $[a;b]$ alors le volume V du solide est donné par la formule :

$$V=\int_a^b S(z)dz \text{ u.v}$$

L'unité de volume est le volume du parallélépipède rectangle unité



Exemple :

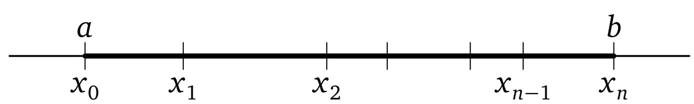
Volume d'une sphère de rayon R.
On a $IM^2=R^2-OI^2=R^2-z^2$, ainsi :

$$S(z)=\pi(R^2-z^2)$$

On en déduit :

$$V=\pi\int_{-R}^{R} R^2-z^2\,dz=\pi\left[R^2z-\frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R}=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}+R^3-\frac{R^3}{3}\right)$$

$$V=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ u.v}$$



VII. Compléments

Intégrales de Wallis

Il s'agit, pour $n \in \mathbb{N}$ des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt \qquad K_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt \qquad L_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n dt$$

Calcul de I_n par IPP

On a immédiatement : $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = 1$.

Pour tout $n \geq 0$, on a par IPP : $(u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t)$. :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \cos t\, dt = \quad \left[(\cos t)^{n+1} \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\sin t)^2 dt \\ I_{n+2} &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \\ I_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2} I_n \end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement : $I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}$; $I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}$; $I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}$.

D'où la formule générale :

Si n est pair $(n = 2p)$

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0$$

$$I_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2}$$

.Si n est impair $(n = 2p+1)$

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} I_1$$

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2\pi}{(2p+1)!}$$

Calcul de J_n en se ramenant à I_n

En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, on obtient :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)^n (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos u)^n du = I_n$$

Calcul de K_n en se ramenant à I_{2n+1}

En posant $u = \sin^{-1} t$ (fonction de $[-1;1]$ à valeurs dans $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$). On a donc $t = \sin u$.

$$K_n = int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n} \cos u\, du = 2I_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Calcul de L_n en se ramenant à K_n

$$L_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n dt = (-1)^n K_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$