Correction Bac Rose

Terminale Scientifique — Maths

TS3 OBLIGATOIRE

Lycée Jean Durand, Castelnaudary (Aude, France métropolitaine)

Exercice 1. (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et $C(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

1. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.

   $\overrightarrow{AB}(1+2; 2-0; -1-1)$ c'est à dire $\overrightarrow{AB}(3;2;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(0;2;1)$, par conséquent :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 0 + 2\times 2 + (-2)\times 1 = 2$$

   De plus :

$$AB = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17} \qquad et \qquad AC = \sqrt{0^2+4+1} = \sqrt{5}$$

   (b) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

   On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ ce qui implique en utilisant les résultats de la question précédente que :

$$2 = \sqrt{17}\times\sqrt{5}\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \Longleftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{\sqrt{85}}$$

   On en déduit, à l'aide de la calculatrice que :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \simeq 77^\circ$$

   (c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   Compte tenu du résultat précédent $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \neq 0[\pi]$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

   A appartient au plan d'équation $2x - y + 2z + 2 = 0$ puisque :

$$2\times(-2) - 0 + 2 + 2 = -4 + 4 = 0$$

De même B appartient au plan d'équation $2x - y + 2z + 2 = 0$ puisque :

$$2 - 2 - 2 + 2 = 0$$

Et enfin C appartient au plan d'équation $2x - y + 2z + 2 = 0$ puisque :

$$-4 - 2 + 4 + 2 = 0$$

Nous venons de démontrer que le plan d'équation $2x - y + 2z + 2 = 0$ contient les points A, B et C. Or, ces trois points ne sont pas alignés donc ils forment un plan et le plan d'équation $2x - y + 2z + 2 = 0$ contient le plan (ABC) ce qui implique que le plan (ABC) admet pour équation $2x - y + 2x + 2 = 0$.

3. Soient $\mathscr{P}_1$, et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

   Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -2 \\ y & = & -1+3t \\ z & = & t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{n_1}(1;1;-3)$ est normal au plan $\mathscr{P}_1$ et le vecteur $\overrightarrow{n_2}(1;-2;6)$ est normal au plan $\mathscr{P}_2$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires puisqu'il n'existe pas de réel k tel que $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$, par conséquent les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite. Si $\mathrm{M}(x;y;z)$ appartient à $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ alors les coordonnées de M vérifient simultanément les équations de $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - 3z + 3 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x + 3z - 3 \\ x - 2(-x + 3z - 3) + 6z = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x + 3z - 3 \\ 3x - 6z + 6 - 6z = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 3z - 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

   En posant $z = t$, les points communs aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont des coordonnées qui vérifient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ z = t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

   qui donc une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

   $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{d}(0;3;1)$ et (ABC) admet $\vec{n}(2;-1;2)$ pour vecteur normal.

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = 0 - 3 + 2 = -1 \neq 0$$

   Les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux ce qui prouve que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) ne sont pas parallèles, par conséquent $\mathscr{D}$ et (ABC) sont sécants en un point $\mathrm{M}(x;y;z)$. Les coordonnées de ce point M vérifient la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ ainsi l'équation cartésienne de (ABC), par conséquent on obtient :

$$2 \times (-2) - (3t - 1) + 2t + 2 = 0 \Longleftrightarrow -t - 4 + 3 = 0 \Longleftrightarrow t = -1$$

   Les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC) sont obtenus pour $t = -1$ donc sont :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3(-1) - 1 = -4 \\ z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \mathscr{D} \cap (\mathrm{ABC}) = \mathrm{M}(-2;-4;-1)$$

5. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$ et de rayon $r = 3$.

(a) Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.

$$\mathrm{M}(x;y;z)\mathscr{S} \Longleftrightarrow \Omega\mathrm{M} = 3 \Longleftrightarrow \Omega\mathrm{M}^2 = 9 \Longleftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2 = 9$$

Une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ est donc :

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2 = 9$$

(b) Étudier l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Si un point $\mathrm{M}(x;y;z)$ est sur la droite $\mathscr{D}$ alors il existe un réel t tel que $\mathrm{M}(-2;3t-1;t)$ et si ce même point est sur la sphère $\mathscr{S}$ alors :

$$(-2-1)^2+(3t-1+3)^2+(t-1)^2 = 9 \Longleftrightarrow (3t+2)^2+(t-1)^2 = 0$$

Cette égalité est possible si et seulement si les deux carrés sont nuls donc si et seulement si $t = -\dfrac{2}{3}$ et $t = 1$ simultanément. t ne peut valoir simultanément deux valeurs différentes, on en déduit qu'il n'existe aucun point de $\mathscr{D}$ sur la sphère $\mathscr{S}$ donc :

$$\mathscr{D} \cap \mathscr{S} = \emptyset$$

Exercice 2. (5 points)

En Syldavie s'organise pour l'été 2014 le grand championnat (GC) de danse sous marine en scaphandre d'au moins 150 kg. Compte tenu de l'importance de la compétition, organisée tous les 4 ans, de nombreuses industries fleurissent et prospèrent. En particulier, la compagnie S, est une entreprise spécialisée dans la fabrication de scaphandre. Pour être homologué par le comité organisateur du GC, les scaphandres doivent avoir une masse d'au moins 145 kg.

La masse d'un scaphandre fabriqué par la machine de la compagnie S peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 150$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

PARTIE A.

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	135	140	145	150	155	160	165
$p(X \leq x)$	0,016	0,077	0,238	0,5	0,762	0,923	0,984

1. Calculer $p(135 \leq X \leq 165)$.

$$p(135 \leq X \leq 165) = p(X \leq 165) - p(X \leq 135) \simeq 0,984 - 0,016 \simeq 0,968$$

2. Calculer la probabilité p pour qu'un scaphandre choisi au hasard dans la production de la compagnie S soit homologué par le comité organisateur du GC.

Le comité organisateur homologue tout scaphandre dont la masse dépasse 145 kg et :

$$p(X \geq 145) = 1 - p(X \leq 145) \simeq 1 - 0,238 \simeq 0,762$$

3. La compagnie S trouve cette probabilité p trop faible. Elle décide alors de modifier ses méthodes de production sans faire varier l'espérance μ mais en modifiant l'écart-type σ afin que la probabilité $p \simeq 0,95$.

(a) Montrer que σ doit vérifier :

$$p\left(\frac{X-150}{\sigma} \leq -\frac{5}{\sigma}\right) = 0,05$$

La compagnie S souhaite que

$$p \simeq 0,95 \iff p(X \geq 145) \simeq 0,95 \iff 1 - p(X \leq 145) \simeq 0,95 \iff 0,05 \simeq p(X \leq 145)$$

C'est-à-dire cette chère compagnie S souhaite que σ vérifie :

$$0,05 \simeq p\left(\frac{X-150}{\sigma} \leq \frac{145-150}{\sigma}\right) \iff p\left(\frac{X-150}{\sigma} \leq \frac{-5}{\sigma}\right) \simeq 0,05$$

(b) En utilisant le résultat suivant : *lorsque* $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ *alors* $p(Z \leq -1,645) \simeq 0,05$, déterminer une valeur approchée de σ.

Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{N}(150;\sigma^2)$ alors $\dfrac{X-150}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$, par conséquent pour que $p\left(\dfrac{X-150}{\sigma} \leq \dfrac{-5}{\sigma}\right) \simeq 0,05$ il faut et suffit que $\dfrac{-5}{\sigma} \simeq -1,645 \iff \sigma \simeq \dfrac{-5}{-1,645} \simeq 3$

PARTIE B.

La machine de la compagnie S a été modifiée afin que la probabilité p de fabriquer un scaphandre homologué soit égale à 0,95. Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 500 scaphandres fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 de la proportion de scaphandre homologué dans un échantillon de taille 500.

Ici on suppose que $p = 0,95$ et on a $n = 500$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 est :

$$\left[0,95 - 1,96\frac{\sqrt{0,95 \times 0,05}}{\sqrt{500}} ; 0,95 + 1,96\frac{\sqrt{0,95 \times 0,05}}{\sqrt{500}}\right]$$

ce qui semble valoir approximativement :

$$I_{500} = [0,93; 0,97]$$

2. Parmi les 500 scaphandres de l'échantillon, 460 sont homologables par le comité organisateur du GC.
Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question précédente, la compagnie S peut-elle estimer que sa nouvelle machine fonctionne comme prévu ?
Tout d'abord observons que $n = 500 > 30$ puis $np = 500 \times 0,95 > 5$ et enfin $n(1-p) = 500 \times 0,05 > 5$.
Dans environ 95% des cas (sous l'hypothèse $p = 0,95$) nous prévoyons que la fréquence obtenue soit comprise dans I_{500}. Cette fréquence vaut $f = 460/500 = 0,92$.

$$f \notin I_{500}$$

Nous ne prenons donc pas beaucoup de risque (5% environ) en remettant en question le travail des ingénieurs de la compagnie S. D'un autre côté ce risque est considérable...

PARTIE C.

Le comité organisateur du GC utilise une machine pour vérifier la conformité des scaphandres utilisés par les compétiteurs (elle doit vérifier le poids, mais encore d'autres critères complexes que nous évoquerons pas ici). Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette machine est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Le tournoi dure 30 jours, déterminer la valeur approchée au millième de λ afin que $p(T \geq 30) = 0,97$.
Dans la suite on prendra $\lambda = 0,001$.
T suit une loi exponentielle de paramètre λ par conséquent :

$$p(T \geq 30) = 0,97 \Longleftrightarrow 1 - p(0 \leq T \leq 30) = 0,97 \Longleftrightarrow p(0 \leq T \leq 30) = 0,03 \Longleftrightarrow \int_0^{30} \lambda e^{-\lambda t} dt = 0,03$$

ce qui équivaut à :

$$[-e^{-\lambda t}]_0^{30} = 0,03 \Longleftrightarrow -e^{-30\lambda} + 1 = 0,03 \Longleftrightarrow e^{-30\lambda} = 0,97 \Longleftrightarrow -30\lambda = \ln 0,97 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0,97}{-30} \simeq 0,001$$

2. Quelle est la probabilité que la machine fonctionne encore sans dérèglement après 50 jours sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement après 20 jours ?
Puisque T suit une loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout $t \geq 0$ et pour tout $s \geq 0$ on a :

$$p_{(X \geq s)}(X \geq t+s) = p(X \geq t)$$

ce qui donne :

$$p_{(X \geq 20)}(X \geq 20+30) = p(X \geq 30) = 0,97$$

3. Quelle est l'espérance de T ?
Puisque T suit une loi exponentielle de paramètre λ alors

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,001} = 1000$$

En "moyenne" la machine fonctionne donc 1000 jours.

4. Déterminer j tel que $p(T \geq j) = 0,5$. Interpréter.
On cherche j tel que

$$p(T \geq j) = 0,5 \Longleftrightarrow p(0 \leq T \leq j) = 0,5 \Longleftrightarrow \int_0^{j} 0,001 e^{-0,001t} dt = 0,5 \Longleftrightarrow [-e^{-0,001t}]_0^{j} = 0,5$$

ce qui équivaut à :

$$-e^{-0,001j}+1=0,5 \Longleftrightarrow e^{-0,001j}=0,5 \Longleftrightarrow -0,001j=\ln 0,5 \Longleftrightarrow j=\frac{\ln 0,5}{-0,001}\simeq 693$$

La probabilité que la machine fonctionne plus de 693 jours est d'environ $0,5$.

Exercice 3. (6 points)

PARTIE A.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\ln(x)+1-\frac{1}{x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$, par somme on obtient :

   $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

   De plus on sait que $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ et que $\lim\limits_{x\to0^+}1-\frac{1}{x}=-\infty$, par somme on obtient :

   $$\lim_{x\to0^+}=-\infty$$

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variation sur $]0\,;\,+\infty[$.

   La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonction de référence elle-même dérivable sur $]0;+\infty[$, de plus on a :

   $$\forall x>0,\qquad f'(x)=\frac{1}{x}+0-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

   Comme $x>0$ il suit que $\frac{1}{x}>0$ et $\frac{1}{x^2}>0$, ainsi $f'(x)>0$ pour tout $x>0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$. D'où :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. Calculer $f(1)$ puis en déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   $f(1)=0$, puisque f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ il suit que $x>1\Longrightarrow f(x)>f(1)=0$, puis que $x<1\Longrightarrow f(x)<0$.

4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

   $\mathrm{F}(x)=x\ln x-\ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

   F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$ on a :

   $$\mathrm{F}'(x)=(x')\ln x+x(\ln x)'-\frac{1}{x}=\ln x+x\times\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}=f(x)$$

   Puisque $\mathrm{F}'(x)=f(x)$ pour tout $x>0$, F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

$F'(x) = f(x)$ et pour $x > 1$ on sait que $f(x) > 0$, par conséquent F est strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ qu'on note α.

$F(x) = x\ln x - \ln x = \ln x(x-1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} x-1$ ainsi par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Notons que $F(1) = 0$.

La fonction F étant dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$, elle est aussi continue sur $]1\,;\,+\infty[$.

La fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

D'après un corollaire du TVI la fonction prends toutes les valeurs de l'intervalle $[0;+\infty[$ exactement une fois, en particulier il existe un unique réel α tel que $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$.

7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Puisque $F(1,9) < 1 - \frac{1}{e}$ et $F(2) > 1 - \frac{1}{e}$ il suit que :

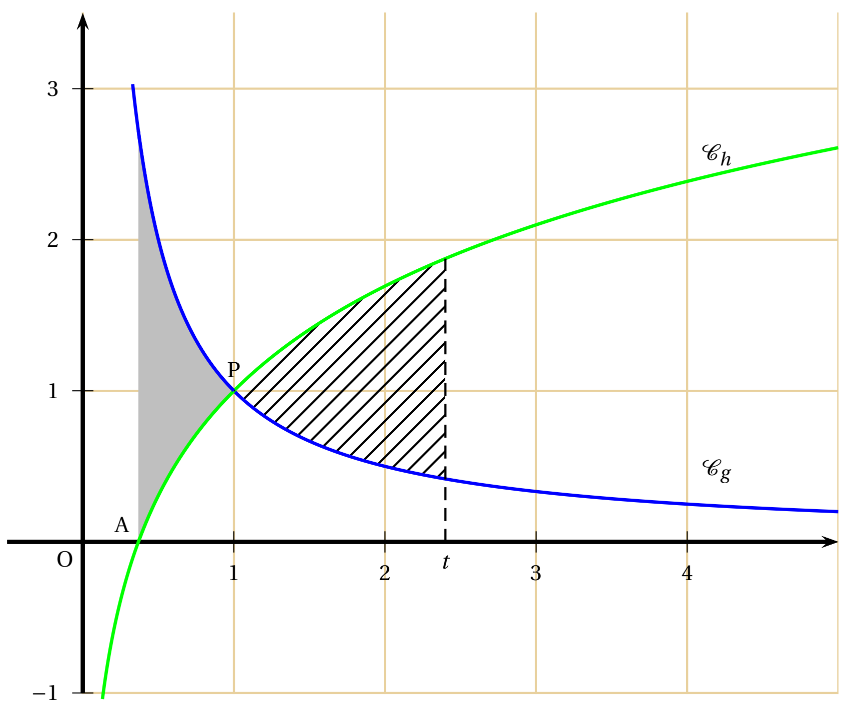
$$1,9 < \alpha < 2$$

PARTIE B.

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x) + 1.$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonctions g et h.



1. A est le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_h$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.

$A(x;0)$ et x est un réel tel que

$$h(x) = 0 \iff \ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1}$$

Il existe donc un unique point d'intersection entre $\mathscr{C}_h$ et l'axe des abscisses qui a pour coordonnées :

$$\mathrm{A}(e^{-1};0)$$

2. P est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$. Justifier que les coordonnées du point P sont (1 ; 1).

   On a :

   $$g(x) = h(x) \Longleftrightarrow h(x) - g(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

   De plus $g(1) = 1$ donc l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ a pour coordonnées :

   $$\mathrm{P}(1;1)$$

3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$ (domaine grisé sur le graphique).

   (a) Montrer que $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} -f(x)dx$.

   Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e};1\right]$ on sait que $f(x) \leq 0 \Longleftrightarrow h(x) - g(x) \leq 0 \Longleftrightarrow h(x) \leq g(x)$, par conséquent du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$ vaut :

   $$\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} g(x) - h(x)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} -f(x)dx$$

   (b) En déduire que $\mathscr{A} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   $$\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} -f(x)dx = [-\mathrm{F}(x)]_{\frac{1}{e}}^{1} = -\mathrm{F}(1) + \mathrm{F}\left(\frac{1}{e}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - \ln\frac{1}{e} = \frac{-\ln e}{e} + \ln e = 1 - \frac{1}{e}$$

4. Soit t un nombre réel de l'intervalle]1 ; $+\infty$[. On note $\mathscr{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ (domaine hachuré sur le graphique).

   On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathscr{A} = \mathscr{B}_t$.

   (a) Montrer que $\mathscr{B}_t = t\ln(t) - \ln(t)$. Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, $f(x) > 0 \Longleftrightarrow h(x) - g(x) > 0 \Longleftrightarrow h(x) > g(x)$, par conséquent :

   $$\mathscr{B}_t = \int_1^t f(x)dx = [\mathrm{F}(x)]_1^t = \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(1) = \mathrm{F}(t) = t\ln t - \ln t$$

   (b) Conclure.

   On cherche $t > 1$ tel que $\mathscr{B}_t = \mathscr{A} \Longleftrightarrow \mathrm{F}(t) = 1 - \dfrac{1}{e} \Longleftrightarrow t = \alpha \simeq 2$

Exercice 4. (4.5 points)

Pour chacune des questions, quatre propositions sont données dont une seule est exacte. Indiquer, sans justification, pour chaque question la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 0,75 *point. Une réponse fausse enlève* 0,25 *point et l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. En cas de total négatif la note est ramenée à* 0.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1,1u_n$.

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: n est un entier naturel.
A est un nombre entier. u désigne un nombre réel.
Traitement :
Saisir la valeur de A
$n = 0$
$u = 1$
Tant que $(u \leq \text{A})$ **Faire**
    u prend la valeur $1,1 \times u$.
    n prend la valeur $n+1$.
Fin Tant que
Afficher n.

1. L'algorithme précédent permet d'afficher la plus petite valeur de n telle que $u_n > \text{A}$. Réponse C.
2. $u_n = 1,1^n$. On cherche le plus petit entier vérifiant :

$$1,1^n > 100 \Longleftrightarrow \ln 1,1^n > \ln 100 \Longleftrightarrow n \ln 1,1 > \ln 100 \Longleftrightarrow n > \frac{\ln 1,1}{\ln 100} \Longrightarrow n > 48$$

Lorsque l'utilisateur entre A = 100 l'algorithme affiche $n = 49$, réponse D.

D. Si f est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ alors la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_{-n}^{n} f(x)dx$ est nécessairement nulle (c'est-à-dire $u_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$).
Soit A le point du plan complexe d'affixe $z_{\text{A}} = 1 - i$ et B le point du plan complexe d'affixe $z_{\text{B}} = 2 - 2\sqrt{3}i$.

3. L'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant $|z_{\text{M}} - 1 + i| = \left|z_{\text{M}} - 2 + 2\sqrt{3}i\right|$ est la médiatrice du segment [AB].
4. On a $z_{\text{A}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **et** $arg(z_{\text{B}}) = -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.
5. Un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$ vaut $-\dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{12}$