∽ CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 1 ∾
LES SUITES

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (10 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+{u_n}^2} \end{cases}$$

1. (a) Étudier sur $[0;1]$ les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{2+x^2}$$

Pour tout $x \in [0;1]$, on a :

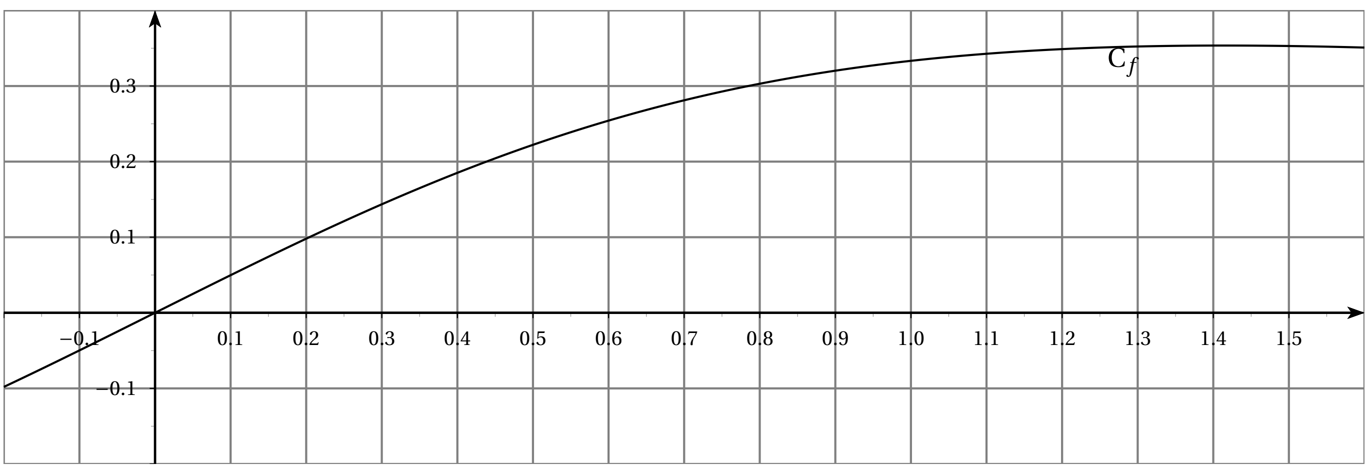
$$f'(x) = \frac{1(2+x^2)-x(2x)}{(2+x^2)^2} = \frac{2+x^2-2x^2}{(2+x^2)^2} = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$$

Le dénominateur étant strictement positif, $f'(x)$ est du signe du numérateur. De plus puisque $x \in [0;1]$, $2-x^2 > 0$, ainsi

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in [0;1]$$

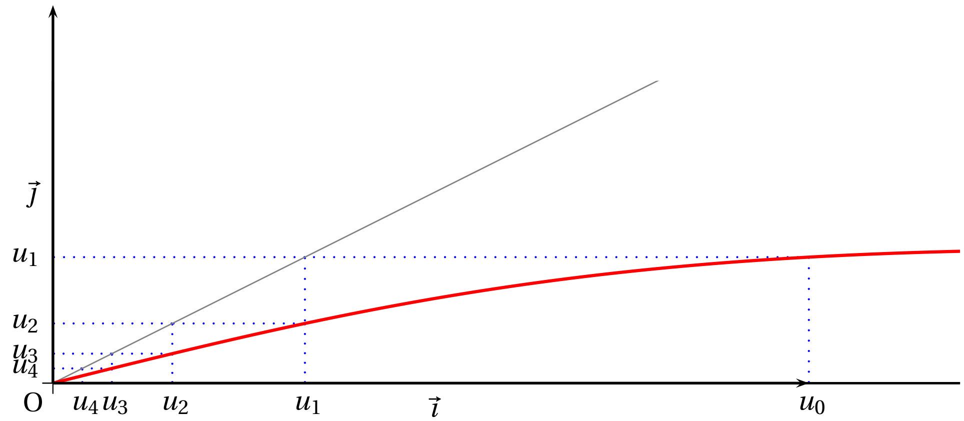
Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

(b) On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f



i. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

M.Rey-Cadours et D.Zancanaro
zancanaro.math@gmail.com



ii. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

Au regard du graphique précédent, cette suite semble décroissante (en effet $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > u_4$) et il semble qu'elle converge vers 0.

(c) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$0 \leq u_n \leq 1$$

.

Notons $\mathscr{P}$ la propriété définie au rang n par :

$$\mathscr{P}(n) : 0 \leq u_n \leq 1$$

- ***Initialisation*** :
  $u_0 = 1$, on vérifie bien que $0 \leq u_0 \leq 1$ ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 \leq u_n \leq 1$ montrons alors que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

$$\begin{array}{ll} & 0 \leq u_n \leq 1 \\ \iff & f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \qquad \text{puisque } f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [0;1] \\ \iff & 0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \\ \implies & 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{array}$$

Ainsi dès lors que la propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n\left(1+u_n^2\right)}{2+u_n^2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2+u_n^2} - u_n = \frac{u_n - u_n(2+u_n^2)}{2+u_n^2} = \frac{-u_n - u_n^3}{2+u_n^2} = \frac{-u_n(1+u_n^2)}{2+u_n^2}$$

(b) En déduire le sens de variations de la suite (u_n)

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n(1+u_n^2)}{2+u_n^2}$. Tout d'abord le dénominateur $2+u_n^2 > 0$, ce qui montre que $\dfrac{-u_n(1+u_n^2)}{2+u_n^2}$ a le même signe que $-u_n(1+u_n^2)$. De même $1+u_n^2 > 0$ donc $u_{n+1}-u_n$ a le même signe que $-u_n$. Puisqu'on a démontré que $u_n > 0$ alors $-u_n < 0$, par conséquent, pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n < 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} < u_n$$

La suite u est donc strictement décroissante.

3. (a) Justifier que la suite (u_n) converge.

Puisque pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, la suite u est minorée par 0. De plus elle est strictement décroissante, or une suite décroissante et minorée converge, c'est donc le cas pour la suite u.

(b) Résoudre l'équation

$$x = \frac{x}{2+x^2}$$

$$\begin{aligned}
& x = \frac{x}{2+x^2} \\
\Longleftrightarrow\quad & x(2+x^2) = x \qquad \text{puisque } 2+x^2 \neq 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & x(2+x^2) - x = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & x(2+x^2-1) = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & x = 0 \quad \text{ou} \quad 1+x^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = -1
\end{aligned}$$

$x^2 = -1$ n'admet aucune solution réelle, par conséquent l'équation proposée admet une unique solution qui est 0.

(c) En déduire la limite de la suite (u_n)

On sait que la suite u converge vers un réel que nous noterons ℓ, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n^2 = \ell^2$$

Puisque $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n^2}$, par passage à la limite on obtient :

$$\ell = \frac{\ell}{2+\ell^2}$$

équation qui d'après la question précédente admet une unique solution : 0, on conclut donc que :

$$\ell = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Exercice 2. (10 points)

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)} \end{cases}$$

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre. Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur $\dfrac{nu+1}{2(n+1)}$ Affecter à n la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
   Cf ci-dessus.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur $\dfrac{nu+1}{2(n+1)}$ Afficher la variable u Affecter à n la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

   (a) Vérifier, par le calcul, les valeurs de u_2 et u_3

$$u_2 = \frac{u_1 + 1}{2(1+1)} = \frac{1,5+1}{4} = \frac{2,5}{4} = \frac{5}{8}$$

$$u_3 = \frac{2 \times \frac{5}{8} + 1}{2(2+1)} = \frac{\frac{5}{4}+1}{6} = \frac{\frac{9}{4}}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

(b) Au vu des résultats du tableau, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).
Comme la précédente cette suite semble décroissante et convergente vers 0.

Partie B - Etude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 1, v_n = nu_n - 1$$

.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
   Pour tout entier naturel n non nul on a :
   $$v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1 = (n+1)\frac{nu_n+1}{2(n+1)} - 1 = \frac{nu_n+1}{2} - 1 = \frac{nu_n+1-2}{2} = \frac{nu_n-1}{2} = \frac{v_n}{2}$$
   La suite v est donc géométrique, sa raison est $\frac{1}{2}$ et son premier terme $v_1 = 1u_1 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
   $$u_n = \frac{1+(0,5)^n}{n}$$
   .
   Puisque v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = \frac{1}{2}$ on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v_1 \times (q)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
   Ainsi donc :
   $$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Longleftrightarrow nu_n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Longleftrightarrow nu_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \Longleftrightarrow u_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{n} = \frac{1+(0,5)^n}{n}$$
3. En déduire la limite de la suite (u_n).
   On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5)^n = 0$ (suite gémétrique de raison comprise entre -1 et 1, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, par conséquent :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1+(0,5)^{n+1}}{n+1} - \frac{1+(0,5)^n}{n} = \frac{n+n(0,5)^{n+1} - (n+1)(1+0,5^n)}{n(n+1)}$$
   Ce nombre est du signe du numérateur (le dénominateur étant strictement positif) et :
   $$n+n(0,5)^{n+1} - n - 1 - n0,5^n - 0,5^n = n(0,5)^{n+1} - n0,5^n - 1 - 0,5^n = n0,5^n(0,5-1) - 1 - 0,5^n = -0,5n0,5^n - 1 - 0,5^n < 0$$
   par conséquent :
   $$u_{n+1} - u_n < 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} < u_n$$
   La suite u est donc strictement décroissante

BONUS :

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n. On additionne les numéros des pages mais une page a été comptée deux fois. On obtient donc un résultat faux égal à 2012.

Quelle page a été comptée deux fois ?

Quel est le nombre total de pages du livre ?

La somme des pages de ce livre est d'une part strictement supérieure à 2012 moins le numéro de la dernière page et strictement inférieure à 2012 i.e :

$$2012 - n < 1 + 2 + \cdots + n < 2012 \Longleftrightarrow 2012 - n < \frac{n(n+1)}{2} < 2012 \Longleftrightarrow 4024 - 2n < n(n+1) < 4024$$

Pour $n = 61$ on a $4024-2\times61 = 3902$ et $n(n+1) = 3782$, pour $n = 62$ on a $4024-2n = 3900$ et $n(n+1) = 3906$. Ainsi 62 convient. Pour $n = 63$ on a $n(n+1) = 4032 > 4024$, par conséquent pour tout $n > 62$ on aura $n(n+1) > 4024$, de même pour tout n entier naturel non nul inférieur à 61 on aura $4024 - 2n > n(n+1)$.
La seule solution possible est que le livre contenait initialement 62 pages, puisque la somme des 62 premiers nombres entiers vaut $3906/2 = 1953$, la page que l'on a compté deux fois était la numéro $2012 - 1953 = 59$.